

La multifacética conjetura de Erdős, Faber y Lovász

Christian Rubio-Montiel

División de Matemáticas e Ingeniería, FES Acatlán
 Universidad Nacional Autónoma de México
 christian.rubio@apolo.acatlan.unam.mx

Resumen

La conjetura de Erdős, Faber y Lovász refleja muy bien esa persistencia del matemático por tratar de resolver un problema y que dentro de los intentos, el problema se traslada de un área de las matemáticas a otra. En este texto, veremos varias equivalencias de esta famosa conjetura que nos llevan de la teoría de conjuntos a la teoría de orden pasando por la teoría de gráficas, hipergráficas y más.

1. Introducción

Durante una reunión de té en Colorado, en el año de 1972 [15], Erdős, Faber y Lovász formularon un problema «sencillo» que al día de hoy sigue abierto. Tal problema se conoce como la conjetura de Erdős-Faber-Lovász (conjetura EFL) la cual dice en su forma original [12]:

Conjetura 1.1. *Si $|A_i| = n$, $1 \leq i \leq n$ son tales que $|A_i \cap A_j| \leq 1$ para cualesquiera $1 \leq i < j \leq n$, entonces uno puede colorear los elementos de la unión $\bigcup_{i=1}^n A_i$ con n colores, de tal forma que cada conjunto tiene elementos de todos los colores.*

En efecto, gran parte de la belleza de esta conjetura radica en su sencillez, solo se requiere saber lo básico de teoría de conjuntos para entenderla. Erdős comenta en el artículo [12]: «Es sorprendente que ningún progreso se ha hecho en este problema, ofrezco 50 libras por su prueba o por un contraejemplo» (después de [13], Erdős ofreció 100 dólares).

Sin embargo, a más de 45 años de la formulación inicial de la conjetura EFL, solamente se conocen resultados parciales. En este artículo de divulgación, veremos diferentes formulaciones en diferentes contextos matemáticos, daremos algunos resultados en las versiones en cuestión y en general, veremos el estado de la conjetura.

2. Gráficas completas

Una formulación natural de la conjetura EFL está dada en términos de gráficas completas. Recordemos que una *gráfica* G es un par (V, E) donde V es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices y E son subconjuntos de vértices con exactamente dos elementos. Una gráfica se llama *completa* si cada par de vértices distintos forma una arista, usualmente denotada como K_n si consta de n vértices. Por otro lado, el número cromático $\chi(G)$ de una gráfica G se define como el mínimo número de colores usados en cualquier coloración de los vértices de tal forma que cada arista tiene colores distintos en los vértices que la forman. Ver [7] para saber más de gráficas y coloraciones.

Tal formulación fue dada por el mismo Erdős en [14], a lo que comenta: «Su dificultad fue descubriéndose lentamente. Ahora ofrezco 500 dólares por una prueba o por un contraejemplo...» y continúa: «Tal vez la siguiente formulación dada en teoría de gráficas resulte más interesante», véase la figura 1 para un ejemplo.

Conjetura 2.1. *Sea G_i una gráfica completa de n vértices para cada $1 \leq i \leq n$ y tales que cada dos de ellas tienen a lo más un vértice común, entonces $\chi(\bigcup_{i=1}^n G_i) = n$.*

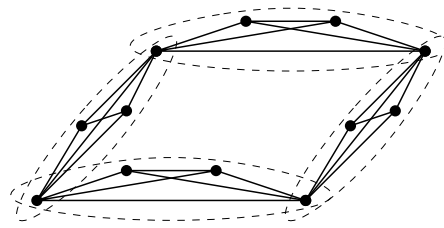


Figura 1. Un ejemplo de una gráfica para $n = 4$.

En [17] aparece una versión aplicada de la conjetura en términos de miembros y comités. A continuación reinterpretamos esa versión en términos de miembros y jurados (entiéndase ‘jurado’ como conjunto de personas), donde las gráficas completas se interpretan como los comités y los colores como sillas.

Conjetura 2.2. *Suponga que hay n jurados cada uno con n miembros, de tal forma que cada dos jurados tienen a lo más un miembro en común. Los jurados asisten a una sala de juicio con n sillas, entonces siempre es posible asignar una silla a cada persona la cual usará de manera fija en cada juicio independiente del jurado que estará presente en tal juicio.*

La siguiente sección habla de una versión de la conjetura en una teoría que generaliza a las gráficas.

3. Hipergráficas lineales

Una *hipergráfica* \mathcal{H} es un par (V, E) donde V es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices y E son subconjuntos de vértices llamados hiperaristas. Decimos que una hipergráfica \mathcal{H} es *lineal* si para cualquier par de vértices hay a lo más una hiperarista que contiene a ambos vértices. Una hipergráfica se llama *t -uniforme* si cada hiperarista contiene t vértices. Notemos que una gráfica es una hipergráfica lineal 2-uniforme. El *número cromático* $\chi(\mathcal{H})$ de una hipergráfica \mathcal{H} es una coloración en los vértices de \mathcal{H} usando el menor número de colores tal que cada hiperarista es heterocromática, es decir, cada uno de sus vértices es de color distinto. Las siguientes dos versiones están dadas por Sánchez-Arroyo en [31], véase la figura 2 para un ejemplo.

Conjetura 3.1. *Para cada hipergráfica lineal n -uniforme \mathcal{H} de n hiperaristas se tiene que $\chi(\mathcal{H}) = n$.*

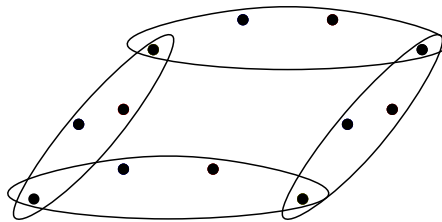


Figura 2. Un ejemplo de una hipergráfica lineal para $n = 4$.

La siguiente equivalencia se obtiene de la conjetura 3.1 al observar que en cada hiperarista existen vértices de grado uno. El *grado* de un vértice es el número de hiperaristas al que pertenece y el *grado mínimo* $\delta(\mathcal{H})$ es el menor de los grados sobre todos los vértices de \mathcal{H} . Entonces, si se remueven los vértices de grado uno, una coloración en los vértices de la nueva gráfica \mathcal{H}' puede ser extendida a la hipergráfica original \mathcal{H} y viceversa, véase la figura 3.

Conjetura 3.2. Si \mathcal{H} es una hipergráfica lineal de n hiperaristas, cada una con a lo sumo n vértices, y $\delta(\mathcal{H}) \geq 2$, entonces $\chi(\mathcal{H}) \leq n$.

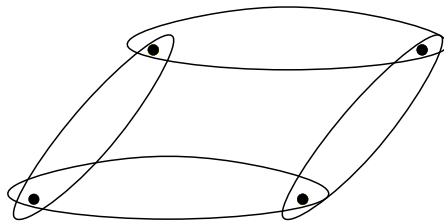


Figura 3. Un ejemplo de una hipergráfica lineal para $n = 4$ y de grado mínimo 2.

Una hipergráfica de n vértices es *densa* si su grado mínimo es mayor que \sqrt{n} . La hipergráfica de la figura 3 tiene grado mínimo igual a \sqrt{n} por lo que no es densa. A continuación enunciamos un primer resultado relevante que aparece en [31].

Teorema 3.1. Sea \mathcal{H} una hipergráfica lineal de n hiperaristas, cada una con a lo sumo n vértices, y $\delta(\mathcal{H}) \geq 2$. Si \mathcal{H} es densa, entonces $\chi(\mathcal{H}) \leq n$.

4. Hipergráficas simples

La hipergráfica dual \mathcal{H}^* de una hipergráfica \mathcal{H} tiene como conjunto de vértices a las hiperaristas de \mathcal{H} y un conjunto de vértices forma una hiperarista si las correspondientes hiperaristas en \mathcal{H} comparten un mismo vértice, véase la figura 4. Note que el dual de una hipergráfica lineal es lineal.

Por otro lado, una hipergráfica se llama *simple* si es lineal y no hay lazos, es decir, hiperaristas con exactamente un vértice. Entonces, dada una hipergráfica \mathcal{H} con las hipótesis de la conjetura 3.2 (lineal de n hiperaristas, cada una con a lo sumo n vértices, y $\delta(\mathcal{H}) \geq 2$), al considerar su hipergráfica dual \mathcal{H}^* se obtiene una hipergráfica simple. Y viceversa, dada una hipergráfica simple \mathcal{H} , al considerar su hipergráfica dual \mathcal{H}^* se obtiene una hipergráfica con las hipótesis de la conjetura 3.2.

En consecuencia, colorear vértices corresponde a colorear hiperaristas en la hipergráfica dual, de tal forma que si los vértices en una hiperarista tienen colores distintos, las hiperaristas incidentes en un vértice en la hipergráfica dual tienen colores distintos, y viceversa. Luego, el número cromático de una hipergráfica se traduce al parámetro denominado *índice cromático* χ' . En [18], Hindman propuso la siguiente versión de la conjetura EFL, véase también [6, 21]:

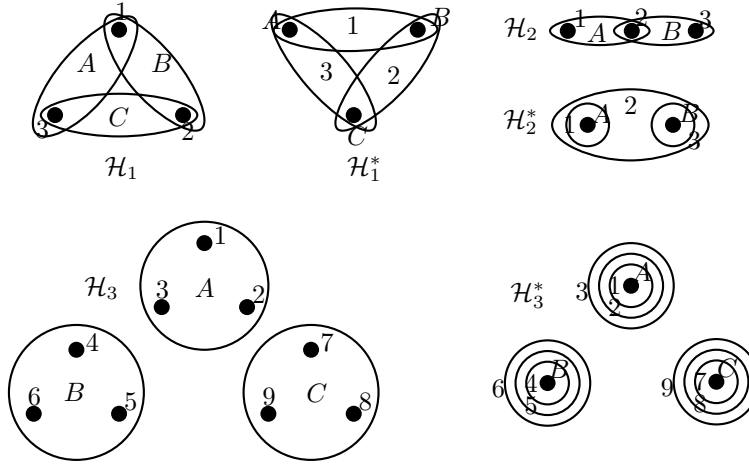


Figura 4. Ejemplos de hipergráficas y sus duales.

Conjetura 4.1. Para cualquier hipergráfica simple \mathcal{H} de n vértices,

$$\chi'(\mathcal{H}) \leq n.$$

En [21], Kahn prueba el siguiente resultado que brinda una cota superior lineal en términos del índice cromático:

Teorema 4.1. Para cualquier hipergráfica simple \mathcal{H} con n vértices,

$$\chi'(\mathcal{H}) \leq n + o(n).$$

Recordemos que la notación asintótica $o(n)$ es el conjunto de funciones $f(n)$ tales que para cualquier constante positiva $c > 0$, existe una constante $n_0 > 0$ tal que $0 \leq f(n) < cn$ para toda $n \geq n_0$. Por abuso de notación, se escribe $f(n) = o(n)$ en lugar de $f(n) \in o(n)$.

5. Espacios parcialmente lineales y gráficas

En la sección 4, vimos que la conjetura EFL es equivalente a que cada hipergráfica simple de n vértices acepta una n -coloración en sus hiperaristas tal que cada par de hiperaristas incidentes tienen colores distintos. Una hipergráfica simple también se conoce como un *espacio parcialmente lineal*, donde los vértices se llaman puntos, las hiperaristas se llaman líneas y cumple que cualesquiera dos puntos pertenecen a lo más una línea y cualquier línea tiene al menos dos puntos, véase la figura 5. Entonces, la conjetura se enuncia como sigue:

Conjetura 5.1. Para cada espacio parcialmente lineal \mathcal{S} de n puntos,

$$\chi'(\mathcal{S}) \leq n.$$

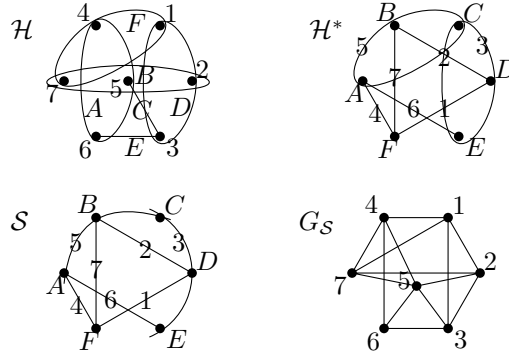


Figura 5. La hipergráfica \mathcal{H} cumple que su grado mínimo es 2, \mathcal{H}^* es su dual, \mathcal{S} es el espacio lineal asociado y $G_{\mathcal{S}}$ la gráfica de intersección de \mathcal{S} .

Esta versión de la conjetura se puede encontrar en [22] donde prueban otra equivalencia como sigue.

Dado un espacio parcialmente lineal $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, se define la gráfica de intersección $G_{\mathcal{S}} = (V, E)$ como la gráfica con conjunto de vértices $V = \mathcal{L}$ y conjunto de aristas $E = \{\{l, g\} : l \cap g \neq \emptyset\}$, es decir, hay una arista en $G_{\mathcal{S}}$ si las correspondientes líneas en \mathcal{S} tienen un punto en común.

Inversamente, sea $G = (V, E)$ una gráfica. Dado un vértice $x \in V$, sea $E_x = \{e \in E : x \in e\}$ el conjunto de todas las aristas incidentes a x . Entonces el espacio dual G^* de G tiene conjunto de puntos E , conjunto de líneas $\{E_x : x \in V\}$ y es un espacio parcialmente lineal siempre que no haya vértices de grado 1 en G , en tal caso, simplemente se agrega un nuevo punto a este tipo de líneas. No es difícil ver que este nuevo espacio $\overline{G^*}$ cumple que $G_{\overline{G^*}}$ es isomorfa a G .

Ergo, dada una gráfica G , definimos $\vartheta(G)$ como el mínimo $v \in \mathbb{N}$ para el cual existe un espacio parcialmente lineal \mathcal{S} de v puntos tal que $G_{\mathcal{S}}$ es isomorfa a G , llamado el *número de intersección lineal* de G . Esto da pauta a la siguiente equivalencia de la conjetura.

Conjetura 5.2. Para cada gráfica G , $\chi(G) \leq \vartheta(G)$.

Recordemos que, el número cromático $\chi(G)$ de G fue definido en la sección 2 como el mínimo k tal que los vértices de G se pueden colorear con k colores de tal forma que vértices adyacentes tienen colores distintos. Este parámetro es sin duda, el más popular dentro de la teoría de gráficas cuyo origen se encuentra en el famoso «Teorema de los cuatro colores» [26].

6. Cúmulus

Una hipergráfica n uniforme de n hiperaristas tal que cada par de hiperaristas comparten exactamente un vértice se llama n -*cúmulu*. En [29], Romero y Sánchez-Arroyo prueban una equivalencia muy interesante de la conjetura EFL obteniendo la siguiente forma:

Conjetura 6.1. *Si \mathcal{H} es un n -cúmulu, entonces $\chi(\mathcal{H}) = n$.*

Ahora bien, siguiendo el mismo razonamiento previo, se definen los n -*cuasi-cúmulus* al tomar n -cúmulus y eliminar los vértices de grado uno, es decir, se obtiene una hipergráfica de hiperaristas tal que dos a dos comparten exactamente un vértice y donde cada vértice pertenece al menos a dos de ellas. En [29] también proponen la siguiente versión de la conjetura:

Conjetura 6.2. *Si \mathcal{H} es un n -cuasi-cúmulu, entonces $\chi(\mathcal{H}) \leq n$.*

7. Espacios lineales

La hipergráfica dual de un cuasi-cúmulu cumple que cada dos vértices definen exactamente una hiperarista y cada hiperarista contiene al menos dos vértices. Esta estructura es equivalente a la llamada *espacio lineal finito* donde las hiperaristas son llamadas líneas y los vértices puntos; por lo que la conjetura toma la siguiente forma:

Conjetura 7.1. *Si \mathcal{S} es un espacio lineal de n puntos, entonces*

$$\chi'(\mathcal{S}) \leq n.$$

La conjetura de EFL en esta presentación aparece en [4] (véase también [16]) donde se demuestra que los espacios lineales llamados proyectivos cumplen con la conjetura, es decir:

Teorema 7.1. *Para cualquier espacio proyectivo finito \mathcal{S} de n puntos se tiene que $\chi'(\mathcal{S}) \leq n$.*

Bajo esta equivalencia, se ha probado que la conjetura EFL se cumple cuando n es a lo más 12, véase [18, 28], es decir:

Teorema 7.2. *Si \mathcal{S} es un espacio lineal de $n \leq 12$ puntos, entonces $\chi'(\mathcal{S}) \leq n$.*

A continuación, definimos los espacios proyectivos finitos; para una introducción detallada revisar el libro de Hirschfeld [19], véase también [11] para saber más de espacios lineales y espacios parcialmente lineales.

Sea $AG(d+1, q)$ el espacio vectorial $(d+1)$ -dimensional sobre un campo finito de q elementos, $GF(q)$. El *espacio proyectivo d -dimensional*

$\text{PG}(d, q)$ es la geometría cuyos subespacios k -dimensionales para $k = 0, 1, \dots, d$ son los subespacios $(k+1)$ -dimensionales de $\text{AG}(d+1, q)$ sin el cero vectorial. En particular, subespacios de dimensión cero, uno y dos son llamados *punto*, *línea* y *plano*, respectivamente. Véase la figura 6.

La relación \sim

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow \exists 0 \neq \alpha \in \text{GF}(q) : \mathbf{x} = \alpha \mathbf{y}$$

es una relación de equivalencia de $\text{AG}(d+1, q) \setminus \mathbf{0}$ cuyas clases de equivalencia son los puntos de $\text{PG}(d, q)$.

Al espacio vectorial $\text{AG}(d, q)$ también se le conoce como el espacio afín d -dimensional de orden q . No es difícil ver que planos paralelos forman clases cromáticas por lo que para cualquier espacio proyectivo afín de n puntos, su índice cromático es a lo sumo n . Los espacios proyectivos afines y proyectivos finitos se pueden entender como unas estructuras más generales descritas en la siguiente subsección.

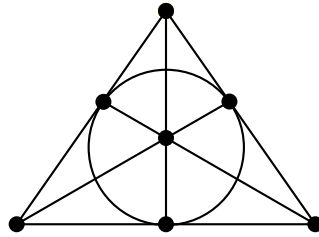


Figura 6. El espacio proyectivo finito $\text{PG}(2, 2)$ también conocido como plano de Fano.

7.1 Diseños de bloque

Los espacios lineales que cumplen condiciones de regularidad también se conocen como diseños de bloque. Enseguida definimos los diseños de bloque llamados *2-sistemas de Steiner*.

Sean n, b, k y r enteros positivos con $n > 1$. Sea $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ un par consistiendo de un conjunto \mathcal{P} con n objetos, llamados puntos de \mathcal{D} , y un conjunto \mathcal{B} de b subconjuntos de \mathcal{P} , llamados bloques de \mathcal{D} . Decimos que \mathcal{D} es un $2 - (n, b, k, r)$ -diseño si satisface:

1. Cada bloque de \mathcal{D} contiene exactamente k puntos (distintos) de \mathcal{D} .
2. Cada punto de \mathcal{D} está contenido en exactamente r bloques (distintos) de \mathcal{D} .
3. Si x y y son puntos distintos de \mathcal{D} , entonces hay exactamente un bloque de \mathcal{D} que los contiene.

Un $2 - (n, b, k, r)$ -diseño también se conoce como *diseño de bloque balanceado incompleto* y se denota también como (n, k) -diseño ya que los parámetros de un $2 - (n, b, k, r)$ -diseño no son independientes. Las siguientes fórmulas los relacionan:

$$nr = bk \quad \text{y} \quad r(k - 1) = (n - 1). \quad (1)$$

Un (n, k) -diseño se llama *cíclico* si existe una etiquetación de \mathcal{P} con \mathbb{Z}_n tal que la biyección $i \mapsto i + 1$ preserva la estructura del diseño, es decir, es un isomorfismo. Colbourn and Colbourn [9] demostraron que los diseños cíclicos cumplen con la conjetura EFL, es decir,

Teorema 7.3. *Para cualquier (n, k) -diseño cíclico \mathcal{D} , se tiene que $\chi'(\mathcal{D}) \leq n$.*

Cuando $k = 3$, los (n, k) -diseños se conocen comúnmente como las *ternas de Steiner*. Cabe mencionar que aún no se sabe si todas las ternas de Steiner cumplen con la conjetura, excepto si $n \leq 19$ [8, 10], véase también [23] y para saber más de bloques de diseños véase [1].

8. Descomposiciones de gráficas completas

Sea \mathcal{S} un espacio lineal con conjunto de n puntos y conjunto de líneas \mathcal{L} . Si identificamos los puntos de \mathcal{S} con los vértices de la gráfica completa K_n , entonces de forma natural el conjunto de puntos de cada línea induce una subgráfica completa, lo que produce una partición en las aristas de K_n , es decir, una descomposición de la gráfica completa en subgráficas completas donde cada elemento de \mathcal{L} equivale a una subgráfica completa, y viceversa, dada una partición de las aristas de la gráfica completa K_n tal que cada parte induce una subgráfica completa, entonces se obtiene un espacio lineal. Tal partición se denota como $[K_n, P]$. Similarmente, colorear líneas se traduce en colorear aristas en K_n de manera que todas las aristas en una misma parte tiene el mismo color. Esta visión de la conjetura aparece en [2], véase también [3].

Conjetura 8.1. *Si $[K_n, P]$ es una descomposición de K_n , entonces*

$$\chi'([K_n, P]) \leq n.$$

Es esta versión de la conjetura donde se aprecia como extensión del Teorema de Vizing ya que cuando cada elemento de la partición es una arista, por el Teorema de Vizing, su índice cromático es n o $n - 1$ por lo que la conjetura EFL se cumple, véase la figura 7.

En [18] se propone la conjetura como un juego de tablero T de $n \times n$ que se puede interpretar como sigue: Dada una gráfica completa K_n con vértices v_1, v_2, \dots, v_n y una descomposición $[K_n, P]$, etiquete las

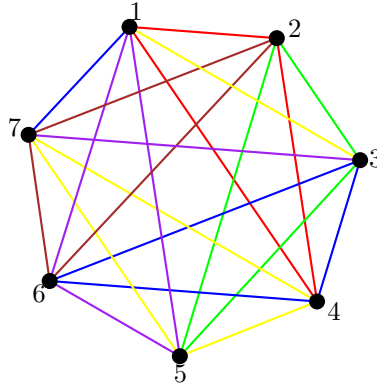


Figura 7. Una descomposición de K_7 coloreada con 6 colores.

columnas del tablero T con los vértices de K_n y etiquete los renglones del tablero T con los colores $1, 2, \dots, n$. Cada elemento P_i de la partición P es asignado a un renglón de T , escribiendo P_i en el espacio correspondiente a cada columna que corresponde a los vértices de la gráfica inducida por P_i . Entonces las clases cromáticas corresponden a los renglones, por lo que la conjetura afirma que existe una manera de que el arreglo acepte n renglones o menos. El cuadro 1 ilustra un tablero completado con éxito.

	1	2	3	4	5	6	7
c_1	P_1	P_1		P_1			
c_2		P_2	P_2		P_2		
c_3	P_7		P_3	P_3		P_3	P_7
c_4	P_8		P_8	P_4	P_4		P_4
c_5	P_5		P_9		P_5	P_5	P_9
c_6		P_6				P_6	P_6
c_7							

Cuadro 1. Un tablero de 7×7 llenado usando las subgráficas de K_7 inducidas por los subconjuntos de vértices $P_1 = \{1, 2, 4\}$, $P_2 = \{2, 3, 5\}$, $P_3 = \{3, 4, 6\}$, $P_4 = \{4, 5, 7\}$, $P_5 = \{5, 6, 1\}$, $P_6 = \{6, 7, 2\}$, $P_7 = \{1, 7\}$, $P_8 = \{1, 3\}$ y $P_9 = \{3, 7\}$.

9. Clones

La conjetura EFL también acepta una formulación en términos algebraicos de acuerdo con Haddad y Tardif [17]. Dada una instancia \mathcal{H} de la conjetura 3.1, es decir una hipergráfica \mathcal{H} que satisface las hipótesis

de la conjetura 3.1, se puede definir una estructura de relación $(V_{\mathcal{H}}, R_{\mathcal{H}})$ con ciertas restricciones que veremos a continuación.

Una relación n -aria es un par (V, R) donde V es un conjunto y R es un subconjunto de V^n , llamada *irreflexiva* si para cada $(x_1, \dots, x_n) \in R$, los elementos x_1, \dots, x_n son todos distintos, y *totalmente simétrica* si para cada $(x_1, \dots, x_n) \in R$ y cada permutación σ de $\{1, \dots, n\}$ se tiene que $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \in R$.

Un *homomorfismo* entre dos relaciones n -arias (V, R) y (V', R') es un mapeo ϕ de V a V' tal que $(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)) \in R'$ para toda $(x_1, \dots, x_n) \in R$. Un mapeo ϕ de un subconjunto dom_{ϕ} de V a V' es llamado un *homomorfismo parcial* si $(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)) \in R'$ para cualesquiera $x_1, \dots, x_n \in dom_{\phi}$ tales que $(x_1, \dots, x_n) \in R$.

Dada una instancia \mathcal{H} , se define una relación $(V_{\mathcal{H}}, R_{\mathcal{H}})$ tal que $V_{\mathcal{H}}$ coincide con el conjunto de vértices de \mathcal{H} y $R_{\mathcal{H}}$ es la relación n -aria que consiste de todas las n -tuplas (x_1, \dots, x_n) tales que $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una hiperarista de \mathcal{H} . Entonces $R_{\mathcal{H}}$ resulta irreflexiva y totalmente simétrica con $n \cdot n!$ elementos.

Sea m un entero. La m -ésima potencia $(V, R)^m$ de la relación n -aria (V, R) es la relación n -aria (V^m, R') , donde $R' = \{(X_1, \dots, X_n) \in (V^m)^n : (\pi_i(X_1), \dots, \pi_i(X_n)) \in R, i = 1, \dots, m\}$ donde π es la proyección dada por $\pi_i(a_1, \dots, a_m) = a_i$.

Una función parcial de una potencia de V a V se llama una operación parcial de V . Sea $pPol(V, R)$ el conjunto de todas las operaciones parciales en V que son homomorfismos parciales de una potencia de (V, R) a (V, R) . Notemos que $pPol(V, R)$ contiene a todas las proyecciones y es cerrada bajo las siguientes composiciones:

Si ϕ_1, \dots, ϕ_k son homomorfismos parciales de $(V, R)^m$ a (V, R) y ψ es un homomorfismo parcial de $(V, R)^k$ a (V, R) , entonces $\psi(\phi_1, \dots, \phi_k)$ es el homomorfismo parcial dado por

$$(X_1, \dots, X_m) \mapsto \psi(\phi_1(X_1, \dots, X_m), \dots, \phi_k(X_1, \dots, X_m)),$$

sobre el dominio que consiste de todas las m -tuplas (X_1, \dots, X_m) para el cual la función está bien definida.

Un conjunto de operaciones parciales que contiene todas las proyecciones y es cerrada bajo la composición se llama *clon parcial*. Un clon parcial se llama *maximal* si no está contenido propiamente en ningún otro clon parcial, excepto del conjunto de todas las operaciones parciales en V . En [17] fue probada la siguiente equivalencia de la conjetura EFL.

Conjetura 9.1. *Sea \mathcal{H} una instancia de la conjetura EFL. Entonces $pPol(V_{\mathcal{H}}, R_{\mathcal{H}})$ es un clon parcial maximal.*

10. Conclusión

La palabra *multifacética* no existe en el diccionario de la RAE, en cambio se usa *polifacética*: 1. adj. Que ofrece varias facetas o aspectos. 2. adj. Dicho de una persona: De variada condición o de múltiples aptitudes. El título del artículo lleva la palabra *multifacética* porque a mi parecer esa palabra expresa mejor que la conjetura EFL no tenga varios caras sino que tiene una cara que se puede expresar en una variedad de formas, en algunas de ellas luce «simple» pero en otras se puede apreciar a priori su dificultad. Dependiendo de la versión, se da pauta a resolver instancias que poco a poco van cerrando la brecha que apunta a que la conjetura es cierta, en el survey [30], se pueden encontrar incluso otras versiones de la conjetura EFL. Sin embargo, también se ha tratado de atacar la conjetura por el otro lado, es decir, en búsquedas de contraejemplos. Faber probó en [15] que de haber un contraejemplo, este debe de estar en un rango de hipergráficas ralas y densas. Recuerde que hipergráfica G de orden n es densa si $\delta(G)^2 > n$. Por el contrario, una hipergráfica G de orden n es *rala* si $c\Delta(G)^2 < n$ para una constante absoluta c . De hecho, en hipergráficas regulares y uniformes de grado fijo, solamente puede haber un número finito de contraejemplos [15]. Véase [5, 20, 24, 25, 27] para otros resultados de la conjetura.

Agradecimientos

Deseo dar las gracias a los árbitros de este artículo por su contribución a la mejora del mismo. Este artículo fue parcialmente financiado por PAIDI/007/19.

Bibliografía

- [1] I. Anderson, *Combinatorial designs and tournaments*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 6, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997.
- [2] G. Araujo-Pardo y A. Vázquez-Ávila, «A note on Erdős-Faber-Lovász conjecture and edge coloring of complete graphs», *Ars Combin.*, vol. 129, 2016, 287–298.
- [3] G. Araujo-Pardo, A. Vázquez-Ávila y C. Rubio-Montiel, «Note on the Erdős-Faber-Lovász conjecture: quasigroups and complete digraphs», *Ars Combin.*, *in press*. *ArXiv:1508.05532*.
- [4] A. Beutelspacher, D. Jungnickel y S. A. Vanstone, «On the chromatic index of a finite projective space», *Geom. Ded.*, vol. 32, núm. 3, 1989, 313–318.
- [5] G. Calvillo y D. Romero, «New families of n -clusters verifying the Erdős-Faber-Lovász conjecture», *Graphs Combin.*, vol. 32, núm. 6, 2016, 2241–2252.
- [6] W. I. Chang y E. L. Lawler, «Edge coloring of hypergraphs and a conjecture of Erdős, Faber, Lovász», *Combinatorica*, vol. 8, núm. 3, 1988, 293–295.

- [7] G. Chartrand y P. Zhang, *Chromatic graph theory*, Discrete Mathematics and its Applications, CRC Press, 2009.
- [8] C. J. Colbourn, «Computing the chromatic index of Steiner triple systems», *Comput. J.*, vol. 25, núm. 3, 1982, 338–339.
- [9] C. J. Colbourn y M. J. Colbourn, «The chromatic index of cyclic Steiner 2-designs», *Internat. J. Math. Math. Sci.*, vol. 5, núm. 4, 1982, 823–825.
- [10] C. J. Colbourn, A. D. Forbes, M. J. Grannell, T. S. Griggs, P. Kaski, P. R. J. Östergård, D. A. Pike y O. Pottonen, «Properties of the Steiner triple systems of order 19», *Electron. J. Combin.*, vol. 17, núm. 1, 2010, Research Paper 98, 30.
- [11] P. Dembowski, *Finite geometries*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1997, Reprint of the 1968 original.
- [12] P. Erdős, «Problems and results in graph theory and combinatorial analysis», en *Proc. Fifth Brit. Comb. Conf. (Univ. Aberdeen, Aberdeen, 1975)*, Utilitas Math., 1976, 169–192. Cong. Num., No. XV.
- [13] P. Erdős, «Some recent problems and results in graph theory, combinatorics and number theory», en *Proceedings of the Seventh Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Louisiana State Univ., Baton Rouge, La., 1976)*, Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1976, 3–14. Congressus Numerantium, No. XVII.
- [14] P. Erdős, «On the combinatorial problems which I would most like to see solved», *Combinatorica*, vol. 1, núm. 1, 1981, 25–42.
- [15] V. Faber, «The Erdős-Faber-Lovász conjecture—the uniform regular case», *J. Comb.*, vol. 1, núm. 2, 2010, 113–120.
- [16] Z. Füredi, «The chromatic index of simple hypergraphs», *Graphs Combin.*, vol. 2, núm. 1, 1986, 89–92.
- [17] L. Haddad y C. Tardif, «A clone-theoretic formulation of the Erdős-Faber-Lovász conjecture», *Discuss. Math. Graph Theory*, vol. 24, núm. 3, 2004, 545–549.
- [18] N. Hindman, «On a conjecture of Erdős, Faber, and Lovász about n -colorings», *Canad. J. Math.*, vol. 33, núm. 3, 1981, 563–570.
- [19] J. W. P. Hirschfeld, *Projective geometries over finite fields*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1979, Oxford Mathematical Monographs.
- [20] B. Jackson, G. Sethuraman y C. Whitehead, «A note on the Erdős-Farber-Lovász conjecture», *Discrete Math.*, vol. 307, núm. 7-8, 2007, 911–915.
- [21] J. Kahn, «Coloring nearly-disjoint hypergraphs with $n + o(n)$ colors», *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 59, núm. 1, 1992, 31–39.
- [22] H. Klein y M. Margraf, «A remark on the conjecture of Erdős, Faber and Lovász», *J. Geom.*, vol. 88, núm. 1-2, 2008, 116–119.
- [23] M. Mészka, «The chromatic index of projective triple systems», *J. Combin. Des.*, vol. 21, núm. 11, 2013, 531–540.
- [24] J. Mitchem, «On n -coloring certain finite set systems», *Ars Combin.*, vol. 5, 1978, 207–212.
- [25] J. Mitchem y R. L. Schmidt, «On the Erdős-Faber-Lovász conjecture», *Ars Combin.*, vol. 97, 2010, 497–505.
- [26] O. Ore, *The four-color problem*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 27, Academic Press, New York-London, 1967.
- [27] V. Paul y K. A. Germina, «On edge coloring of hypergraphs and Erdős-Faber-Lovász conjecture», *Discrete Math. Algorithms Appl.*, vol. 4, núm. 1, 2012, 1250003, 5.
- [28] D. Romero y F. Alonso-Pecina, «The Erdős-Faber-Lovász conjecture is true for $n \leq 12$ », *Discrete Math. Algorithms Appl.*, vol. 6, núm. 3, 2014, 1450039, 5.
- [29] D. Romero y A. Sánchez-Arroyo, «Adding evidence to the Erdős-Faber-Lovász conjecture», *Ars Combin.*, vol. 85, 2007, 71–84.
- [30] ———, «Advances on the Erdős-Faber-Lovász conjecture», en *Combinatorics, complexity, and chance*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., vol. 34, Oxford Univ. Press, Oxford, 2007, 272–284.

- [31] A. Sánchez-Arroyo, «The Erdős-Faber-Lovász conjecture for dense hypergraphs», *Discrete Math.*, vol. 308, núm. 5-6, 2008, 991–992.