

Control: El arte de volar... y algo más

Luz de Teresa
 Instituto de Matemáticas
 Universidad Nacional Autónoma de México
 ldeteresa@im.unam.mx

1. Volar

Pues ¡qué tonto y pueril aquel de Creta que le enseñó a su hijo el arte de los pájaros! Con todo y sus alas, el muy tonto se ahogó.

Enrique VI, W. Shakespeare

En la mitología griega se cuenta que Ícaro estaba preso junto a su padre Dédalo en la isla de Creta. Dédalo decidió escapar, pero como Minos, el rey de Creta, controlaba la tierra y el mar, se puso a trabajar para fabricar alas para él y su joven hijo. Enlazó plumas entre sí uniendo las centrales con hilo y las laterales con cera, dándole al conjunto la curvatura de las alas de un pájaro. Ambos huyeron volando. Desobediendo a su padre, Ícaro subió demasiado y el sol derritió la cera que unía sus plumas. No pudiendo volar más cayó al mar, ahogándose.

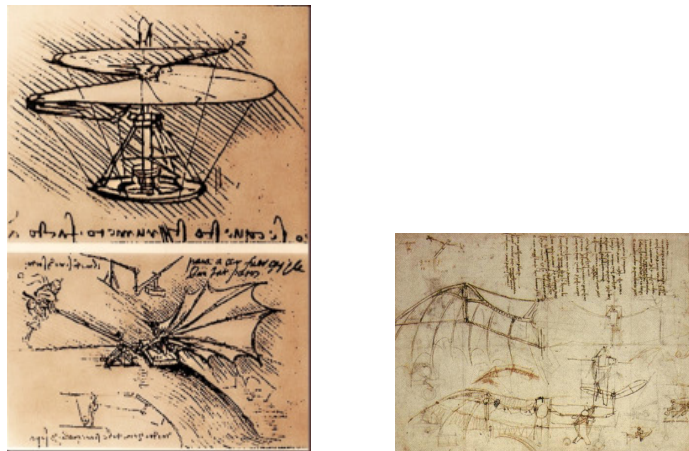


Figura 1. Leonardo da Vinci, artilugios de vuelo.

Leonardo da Vinci, el famoso pintor e inventor del renacimiento, dedicó gran parte de su vida a estudiar el vuelo de los pájaros. Estaba obsesionado con hacer realidad la posibilidad de volar. Hizo una gran variedad de dibujos, bocetos y anotaciones de las acrobacias de aves, murciélagos e insectos. Cuenta la novela sobre Leonardo, escrita por Merejovsky [13], que el genio italiano en varias ocasiones construyó aparatos voladores que simulaban alas . . . sin embargo nunca alcanzó su sueño. Entre 1486 y 1515 Leonardo escribió sus dos conocidos tratados sobre el vuelo de los pájaros, de geniales intuiciones y enorme agudeza analítica.

Pasaron siglos, y muchos accidentes mortales, antes de que el hombre «tuviera alas». Otto Lilienthal (1848-1886), ingeniero aeronáutico, falleció en uno de estos vuelos pero sentó las bases de la aviación.

Con gran impacto en la historia de la civilización occidental están los molinos de viento que permitieron moler granos para hacer el pan que alimentó a gran parte de la humanidad durante siglos. El arte renacentista, por ejemplo, está lleno de imágenes donde aparecen estos *modernos* artilugios ilustrando escenas bíblicas [15]. Una imagen menos feliz, pero quizás más famosa, es la del pasaje de *El Quijote* [6] en el que el hidalgo los enfrenta.

Mire vuestra merced –respondió Sancho– que aquellos que allí se parecen no son gigantes, sino molinos de viento, y lo que en ellos parecen brazos son las aspas, que, volteadas del viento, hacen andar la piedra del molino. Bien parece –respondió don Quijote– que no estás cursado en esto de las aventuras: ellos son gigantes; y si tienes miedo, quítate de ahí, y ponte en oración en el espacio que yo voy a entrar con ellos en fiera y desigual batalla.



Figura 2. Don Quijote lucha contra los molinos de viento, ilustración de Gustave Doré.

¿Quién no ha intentado sostener una vara en equilibrio sobre la palma de la mano? Jugar, moler o volar tienen todos una misma finalidad: Modificar nuestro entorno, *controlar*.

La historia de la humanidad está plagada de ejemplos simples o complicados donde aparecen mecanismos de control. Ya en el año 50 antes de nuestra era, Hero de Alejandría inventó un dispensador de vino con un ingenioso mecanismo en el que la válvula distribuidora (elemento de control) no estaba directamente atada al flotador (sensor), [12]. Con la Revolución Industrial se hicieron necesarios mecanismos cada vez más complejos. El *regulador de Watt* fue creado por Watt y su socio Boulton en 1788 a partir de un mecanismo que ya se había utilizado en molinos para que las piedras de molienda no se desplazaran (véase e.g. [12]). Este regulador supuso un gran avance en los motores de vapor y por tanto, para la tecnología de la época.

2. Control óptimo

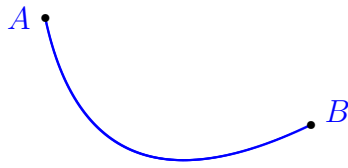
En los ejemplos anteriores sigue siendo el *ingenio* del inventor el que resuelve el problema. Son resultados tecnológicos, no teóricos. ¿Y a todo este cuento que tienen que ver las matemáticas? Todavía las matemáticas no se hacen evidentes. . .

Dicen Stewart y Golubitsky [16]

Los científicos usan las matemáticas para construir universos mentales. Escriben descripciones matemáticas –modelos– que capturan fragmentos esenciales de como creen que el mundo se comporta. Después, analizan las consecuencias. Esto se llama «teoría».

¿Cuándo empieza entonces la teoría matemática del control? Puedo afirmar, sin temor a equivocarme, que la *teoría matemática del control* nace cuando se crean modelos matemáticos de los sistemas que se quiere controlar.

Ya en la Grecia clásica se trabajaron y resolvieron muchos problemas de optimización, que entran dentro de lo que hoy se conoce como *Cálculo de Variaciones* (ver el famoso problema de la reina Dido [2]); sin embargo, las demostraciones con los cánones actuales de rigor sólo se dieron hasta el siglo XIX. Por esta razón Sussman y Willems [17] aseguran que el *control óptimo* empieza en 1697 en los Países Bajos cuando Johannes Bernoulli publicó su solución al *problema de la braquistócrona*: Determinar la curva de descenso más rápido de una partícula que se desliza de un punto A dado a otro punto B que no esté en la recta vertical que pasa por A y considerando que la fricción y la resistencia del aire son despreciables.



En términos modernos, se pretende minimizar el valor de la integral T que representa el tiempo de descenso,

$$T = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + |y'(x)|^2}{2gy(x)}} dx$$

donde g es la fuerza de gravedad, $(0, y(0)) = A$, $(x_1, y(x_1)) = B$. En [11] hay una excelente descripción del problema de la braquistócrona, su planteamiento matemático y su solución.

Los puntos de vista del *control óptimo* y del *Cálculo de variaciones* son distintos, como lo explican Sussmann y Willems [17]: El Cálculo de Variaciones busca resolver problemas de optimización de la siguiente forma «estándar».

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } I = \int_a^b L(q(t), u(t)) dt, \\ &\text{sujeto a } q(a) = q_0, q(b) = q_1, \dot{q}(t) = u(t), t \in [a, b]. \end{aligned}$$

El control óptimo, en cambio, busca minimizar sobre un conjunto de curvas C ; por ejemplo éste puede ser el que a $t \mapsto q(t)$, donde q resuelve la ecuación diferencial

$$\dot{q}(t) = f(q(t), u(t), t) \tag{1}$$

y $u(t)$ es una función de control. Como cada miembro de C no determina necesariamente de manera única un control u debemos hablar de un par trayectoria-control $(q(\cdot), u(\cdot))$. De esta manera en control óptimo hay al menos dos elementos que hacen interesante esta estructura, el funcional a minimizar I y la dinámica f .

De hecho la estructura de los problemas de control óptimo puede ser aún más interesante y complicada si q es solución, no de una ecuación diferencial ordinaria como es (1), sino de una ecuación diferencial parcial, de una ecuación con retardo o de una ecuación estocástica.

Veamos un problema actual. En el diseño de los coches híbridos se tienen que optimizar varios parámetros: minimizar el gasto de energía (lo que involucra, por ejemplo, una gran batería que es muy costosa), reducir la emisión de CO_2 , minimizar la generación de óxidos de nitrógeno (NO_x) y mejorar la comodidad y el desempeño del vehículo. Las tasas de CO_2 y de NO_x suelen estar reguladas por los gobiernos

locales mientras que el gasto y desempeño son valores que asigna el consumidor y son relativamente subjetivos.

Desafortunadamente esos objetivos de optimización son contradictorios pues el mínimo gasto de gasolina y el mayor desempeño se dan en puntos distintos. Esto significa que se debe de trabajar con *multiobjetivos*. Esta teoría está íntimamente relacionada con el área de las matemáticas conocida como *teoría de juegos*. Las problemáticas en torno del diseño óptimo de coches híbridos son complejas. El lector interesado puede consultar el libro [3] donde se desarrolla ampliamente esta temática. En él se trabaja con sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que sirven para modelar las emisiones, el estado de carga de la batería, el consumo de gasolina, etc.

Plantearemos ahora un modelo específico de ecuaciones diferenciales parciales ligado a un problema de control óptimo (véase [9]). Consideremos un río o lago con agua contaminada que ocupa un espacio bi o tri dimensional Ω , es decir, $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ con $k = 2, 3$. Buscamos encontrar la fuente de contaminación, que es desconocida. Supongamos que se puede medir el contaminante $y(x, t)$ en un subconjunto \mathcal{O} de Ω en el intervalo de tiempo $[0, T]$. La concentración y satisface la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + V \cdot \nabla y + \sigma y &= s(t)\delta_a \text{ en } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial y}{\partial n} &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, T), \quad y(x, 0) = y_0 \text{ en } \Omega \end{aligned} \quad (2)$$

donde δ_a es la distribución Delta de Dirac evaluada en el punto a que es la posición de la fuente de contaminación. En (2), $\frac{\partial y}{\partial n}$ denota la derivada normal de la función y sobre la frontera del conjunto Ω . Asumimos que a pertenece a K un conjunto compacto contenido en $\bar{\Omega}$ y que el flujo de contaminación en el tiempo es $s(t)$.

El problema de control óptimo es el siguiente: Encontrar $a \in K$ que minimice

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} (y - y_{obs})^2 dx dt, \quad (3)$$

donde y es la solución de (2), y_{obs} corresponde a las concentraciones medidas y \mathcal{O} es la región donde se realizan las mediciones. Normalmente se tienen estaciones de medición que pueden considerarse un conjunto abierto de Ω . Estamos suponiendo que se conoce y_0 y la tasa $s(t)$.

Además del problema de resolver la ecuación diferencial parcial (2) (la noción de solución requiere de una formulación especial pues δ_a no es una función sino una *distribución*), nos planteamos si (3) alcanza su mínimo en algún punto a y si es el caso, vemos de qué manera se caracteriza este punto.

3. Controlabilidad

Además de los problemas de control óptimo existe otro concepto que se liga tanto a las aplicaciones como a los aspectos matemáticos y es lo que se conoce como *controlabilidad*.

Esta idea es sumamente intuitiva y la utilizamos cotidianamente: ¿Puedo ir de Cuernavaca a Pachuca en coche? ¿Lo puedo hacer de Houston a Madrid? Mirando un mapa es claro que la respuesta a la primera pregunta es positiva y a la segunda es negativa.

Para ilustrar este concepto consideremos $x(t) \in \mathbb{R}^n$ solución de la ecuación diferencial del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x(t); u(t)), \\ x(0) = x^0, \end{cases} \quad (4)$$

donde $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definición 3.1. Diremos que (4) es *exactamente controlable al tiempo* $T > 0$ si para todo par de datos iniciales y finales (x^0, x^1) existe

$$u \in \mathcal{U}_{ad} = \{\text{conjunto de controles admisibles}\}$$

tal que la solución de (4) satisface $x(T; u) = x^1$.

El conjunto \mathcal{U}_{ad} es un conjunto predefinido y está íntimamente relacionado con el problema planteado. En el ejemplo del coche podemos suponer que u es la velocidad y está acotada. En otros problemas se establece $\mathcal{U}_{ad} = \{u \text{ medible} \mid \int_0^T u^2(t)dt < \infty\}$, es decir, que $u \in L^2(0, T)$ (véase e.g. [4]).

Sabemos dar una respuesta al problema de control exacto en el caso lineal, es decir, cuando

$$F(x, u) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

donde $A \in M_{n \times n}$ y $B \in M_{n \times m}$. Consideraremos A y B matrices constantes o *autónomas*. La función $x(t)$ representa un estado del sistema y $u(t)$ un control.

El caso lineal consiste entonces en establecer condiciones necesarias y suficientes para que el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu(t), \\ x(0) = x^0, \end{cases} \quad (5)$$

sea controlable con controles en un espacio particular.

Desde mediados del siglo pasado se conocen condiciones necesarias y suficientes para que un sistema lineal autónomo sea controlable con $\mathcal{U}_{ad} = L^2(0, T)$. Esta condición se conoce como el *Teorema de Rango de Kalman*.

Teorema 3.1. *El sistema (5) es exactamente controlable al tiempo $T > 0$ si y sólo si*

$$\text{rango } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n.$$

En particular si (5) es controlable en algún tiempo $T > 0$, lo será en cualquier tiempo.

A la matriz de dimensión $n \times nm$

$$U = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$$

se le conoce como *matriz de controlabilidad*. La demostración de este teorema es clásica y se encuentra en numerosos textos (véase e.g. [18]). Esencialmente hay que utilizar el Teorema de Cayley-Hamilton y la expresión en serie de potencias de la exponencial de una matriz.

El lector puede verificar que se satisface la condición de rango de Kalman con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

y que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{L} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

no la satisfacen.

El teorema 3.1 nos dice que la matriz U debe tener rango **completo** para que el sistema lineal (4) sea controlable.

El problema de controlabilidad tiene sentido en el contexto de las ecuaciones diferenciales parciales, sólo que se modifica (5) de manera que A, B serán operadores diferenciales y las condiciones iniciales o finales, funciones en un determinado Espacio de Banach. Es claro que la respuesta de Kalman ya no va a ser válida en este contexto. Sin embargo, existen técnicas de análisis funcional que nos permiten estudiar los problemas de control en ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales parciales de una manera «semejante».

Esta técnica, que no es la única posible en el contexto de las ecuaciones diferenciales parciales, sí es una de las más utilizadas, consiste en trabajar con el sistema adjunto de la ecuación (lineal) que queremos controlar. Ilustraremos la técnica en el contexto de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Sea A^* la matriz adjunta de A es decir, la matriz que satisface

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad (8)$$

para toda $x, y \in \mathbb{R}^n$ y donde (\cdot, \cdot) denota el producto interno (o producto punto) en \mathbb{R}^n . (A^* es la matriz transpuesta conjugada, pero en términos de operadores es el operador adjunto, término mas adecuado en el contexto de las ecuaciones diferenciales parciales). No es difícil

demostrar que el sistema (5) es exactamente controlable si y sólo si es exactamente controlable a 0, es decir si para toda condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe un control u tal que $x(T) = 0$.

Consideremos el siguiente *sistema adjunto* a (5) :

$$\begin{cases} -\dot{\varphi} = A^* \varphi, \\ \varphi(T) = \varphi^T. \end{cases} \quad (9)$$

Esta ecuación tiene para toda $\varphi^T \in \mathbb{R}^n$ una única solución analítica de $[0, T]$ a \mathbb{R}^n , es decir, $\varphi \in C^\omega([0, T]; \mathbb{R}^n)$ y la ecuación es *retrógrada* (va «hacia atrás» en el tiempo).

Utilizando que (9) es la *ecuación adjunta* de (5) se puede demostrar que un dato inicial $x^0 \in \mathbb{R}^n$ puede ser llevado a cero en el tiempo $T > 0$ utilizando un control $u \in L^2(0, T)$ si y sólo si

$$\int_0^T (u, B^* \varphi) dt + (x^0, \varphi(0)) = 0 \quad (10)$$

para toda $\varphi^T \in \mathbb{R}^n$ y φ la solución correspondiente a (9).

Para conseguir una función u que verifique (10) introducimos un funcional que en principio parecería no tener relación con nuestro problema de control.

Definimos $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$J(\varphi^T) = \frac{1}{2} \int_0^T |B^* \varphi|^2 dt + (x^0, \varphi(0))$$

donde φ es la solución de (9) correspondiente al dato φ^T . Tenemos el siguiente resultado:

Lema 3.1. *Supongamos que J tiene un minimizador $\hat{\varphi}^T \in \mathbb{R}^n$ y sea $\hat{\varphi}$ la solución correspondiente a (9). Entonces*

$$u = B^* \hat{\varphi}$$

es un control (a cero) del sistema (5) con dato inicial x^0 .

La prueba de este lema consiste en buscar puntos críticos del funcional J , es decir, tomar derivadas direccionales de J e igualar a cero. Si hay un minimizador rápidamente podemos concluir que para toda $\varphi^T \in \mathbb{R}^n$ y φ la solución correspondiente a (9) se tiene

$$\int_0^T (B^* \hat{\varphi}, B^* \varphi) dt + (x^0, \varphi(0)) = 0.$$

El lema 3.1 nos ha permitido transformar un problema de control en un problema de optimización.

¿Tiene J siempre un minimizador? La respuesta es no, depende de la relación que tengan las matrices A y B . Esta relación se da a través del sistema adjunto. Diremos que el sistema (9) es observable al tiempo

$T > 0$, si existe una constante $C > 0$ tal que para toda φ^T y φ la solución correspondiente de (9) se tiene

$$\int_0^T |B^* \varphi|^2 dt \geq C |\varphi(0)|^2. \quad (11)$$

Se puede demostrar que esta desigualdad es equivalente a la existencia de un minimizador para J y por tanto lo es con la existencia de un control a cero. ¡Parece que he complicado las cosas! Encontrar el rango de una matriz, al menos para matrices chicas, no es difícil. ¡Mostrar (11) no parece fácil!

En efecto, pero a veces, en problemas de controlabilidad para ecuaciones diferenciales parciales, lo que logramos mostrar es una desigualdad de este tipo. ¡Recordemos que con las parciales no tenemos el Teorema de Rango de Kalman! Una de las técnicas más utilizadas es demostrar desigualdades de observabilidad. No suele ser fácil y hay que utilizar técnicas avanzadas de análisis funcional, análisis microlocal, teoría de números, variable compleja etc. La ventaja: aún estudiando problemas lineales tenemos una enorme lista de problemas abiertos.

Veamos ahora un ejemplo de problema cuando se trabaja con ecuaciones diferenciales parciales: Consideremos la *Ecuación del Calor* unidimensional.

Para $y^0 \in L^2(0, \pi)$, tomamos la ecuación diferencial parcial:

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} = h \chi_\omega & (t, x) \in (0, T) \times (0, \pi), \\ y(t, 0) = y(t, \pi) = 0, & t \in (0, T), \\ y(0, x) = y^0, & x \in (0, \pi). \end{cases} \quad (12)$$

En esta ecuación $\omega \subset (0, \pi)$ es la región de control (hace el papel de la matriz B , en las ecuaciones diferenciales ordinarias, que es la forma en que actúa el control) y χ_ω denota la función característica del conjunto ω . La función que buscamos es h , un control que actúa únicamente sobre ω .

Resultados de regularidad para la ecuación del calor nos indican que es imposible controlar exactamente la ecuación del calor. Es decir, no es cierto que para todo $y^0, y^1 \in L^2(0, \pi)$ exista $h \in L^2(\omega \times (0, T))$ tal que $y(T) = y^1$. Sin embargo, la pregunta que nos planteamos es de control a cero. ¿Existe h tal que $y(T) = 0$?

Procediendo como en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias se puede contestar esta pregunta trabajando con el sistema adjunto:

$$\begin{cases} v_t + v_{xx} = 0 & t \in (0, T), x \in (0, \pi), \\ v(t, 0) = v(t, \pi) = 0, & t \in (0, T), \\ v(T, x) = v^T, & x \in (0, \pi). \end{cases} \quad (13)$$

En este caso el resultado de control a cero es equivalente a probar que existe $C > 0$ tal que toda solución de (13) satisface

$$\int_0^\pi |v(x, 0)|^2 dx \leq C \int_0^T \int_\omega |v(x, t)|^2 dx dt. \quad (14)$$

Sabemos desde hace 20 años [8, 10] que esta desigualdad es verdadera. Sin embargo, las técnicas para demostrarla no son fáciles. Una de las más utilizadas son las *Desigualdades de Carleman*, que relacionan un operador diferencial con la norma local con peso de su solución. Originalmente las introdujo Carleman en 1939 para mostrar la unicidad de soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales parciales. En la actua-



Figura 3. Carleman.

lidad esta técnica se utiliza tanto en problemas de control como en la solución de problemas inversos.

4. Otros problemas de control

En las noticias y redes sociales se habla mucho de vehículos de conducción autónoma. Tenemos desde los coches de Google, al Tesla, al Inspiration. El manejo automático de vehículos es un problema complejo que mezcla conceptos de optimalidad con controlabilidad.

Un modelo simplificado de este problema es una ecuación diferencial ordinaria no lineal

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0,$$

donde x es la trayectoria o camino que sigue el vehículo, x_0 es la posición inicial y deseamos llegar a nuestro destino x_T . Además, u es el control que tiene restricciones en \mathcal{U}_{ad} , como la velocidad permitida al auto, el ángulo de giro de las ruedas, etc. Adicionalmente, si $Z(t)$ marca el borde de la carretera y los obstáculos en el camino (otros coches, personas, baches) necesitamos que para un $\varepsilon > 0$ se cumpla para todo $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{dist}(x(t), Z(t)) &\geq \varepsilon. \\ u &\in \mathcal{U}_{ad} \end{aligned}$$

Si $\hat{x}(t)$ muestra el centro de nuestro camino o una trayectoria que busquemos seguir, los objetivos de la conducción automática son

- $x(T) = x_T$,
- Minimizar $\sup_t |x(t) - \hat{x}(t)|$.

Por otra parte, un problema recurrente en ingeniería y ciencias de materiales es la estabilización de estructuras como placas, antenas o satélites. Las oscilaciones o vibraciones de materiales viscoelásticos o estructuras están descritas por ecuaciones diferenciales parciales. En general en las aplicaciones se reducen vibraciones implementando leyes de retroalimentación en el sistema. Es decir, si la variable de estado de una ecuación diferencial es y se busca que el control sea $u = u(y)$, una función del estado del sistema. Se construyen estas retroalimentaciones de manera que las oscilaciones de las soluciones se reducen cuando el tiempo crece.

Un ejemplo sencillo para explicar este concepto es mediante la ecuación de ondas:

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} = 0 & t \in (0, T), x \in (0, L), \\ y(t, 0) = y(t, L) = 0, & t \in (0, T), \\ y(0, x) = y_0, \quad y_t(0, x) = y_1(x), & x \in (0, L). \end{cases} \quad (15)$$

Es fácil demostrar que la energía de este sistema se conserva, es decir,

$$E(t) = E(0), \quad \forall t \geq 0,$$

donde

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (|y_t(x, t)|^2 + |y_x(x, t)|^2) dx.$$

Dado que (15) no es ni asintóticamente ni exponencialmente estable, requerimos buscar un control de lazo cerrado, es decir que dependa de la propia solución, de manera que la ecuación obtenida sea exponencialmente estable. Así buscamos definir un control $\phi(y, y_t)$, tal que la solución de la ecuación

$$\begin{cases} y_{tt} - y_{xx} = \phi(y, y_t) & t \in (0, T), x \in (0, L), \\ y(t, 0) = y(t, L) = 0, & t \in (0, T), \\ y(0, x) = y_0, \quad y_t(0, x) = y_1(x), & x \in (0, L), \end{cases} \quad (16)$$

decaiga exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$. No es difícil ver que si elegimos $\phi(y, y_t) = -y_t$ tenemos una ecuación exponencialmente estable. Esto resuelve nuestro problema. Para más ejemplos en este tema consultar [5].

Regresando al título de este texto *El arte de volar...*: actualmente en aeronáutica se debe trabajar en todos los aspectos de control ya mencionados. Se busca controlabilidad, pues vamos de un punto a otro del planeta. Se requiere estabilidad pues en las zonas de turbulencia pueden suscitarse accidentes graves cómo el del avión de Air France que

el 1º de junio de 2009 cayó en el Atlántico volando de Brasil a Francia. Hay también un problema de control óptimo involucrado pues se busca, entre otras cosas, tener el menor gasto de combustible. Además, en el diseño de aviones están involucrados problemas de forma óptima; aparecen de forma natural ecuaciones diferenciales parciales no lineales que modelan flujos turbulentos, i.e., las ecuaciones de Navier-Stokes. Véase e.g [1]. Para volar y volar *bien* es necesario saber mucha teoría matemática de control.

5. Conclusiones

Los problemas matemáticos ligados a la teoría del control son numerosos, tanto en los aspectos teóricos como en las aplicaciones. Por ejemplo, los modelos de crecimiento de tumores o de propagación de enfermedades infecto contagiosas están descritos con ecuaciones diferenciales parciales no lineales que hay que aprender a trabajar. Es decir, hacen falta conocimientos teóricos profundos para resolverlos y proponer nuevas ideas.

Parafraseando a Tolstoi el ingeniero mexicano Romeo Ortega nos dijo en una conferencia sobre el control de ecuaciones diferenciales ordinarias:

Todas las familias felices (sistemas lineales) se parecen entre sí, mientras que las infelices (sistemas no lineales) son desgraciadas (no lineales) a su manera.

Yo agregaría que a «no lineales» hay que sumar «Ecuaciones Diferenciales Parciales» o como decimos en México, «a cada perro (ecuación diferencial parcial, no linealidad), su pedrada (técnica)».

El lector que quiera profundizar en estos temas puede encontrar en los siguientes textos [5, 12, 17, 7, 14, 18] elementos para su estudio.

Bibliografía

- [1] A. Abbas-Bayoumi y K. Becker, «An industrial view on numerical simulation for aircraft aerodynamic design», *J. Math. Industry*, vol. 1, 2011, 1–10.
- [2] M. S. Ashbaugh y R. D. Benguria, «El problema de la Reina Dido: Panorama sobre los problemas de la isoperimetría», *Joven Matemático*, vol. 1, 2010, 3–8.
- [3] T. J. Böhme y B. Frank, *Hybrid systems, optimal control and hybrid vehicles: Theory, methods and applications*, Springer, 2017.
- [4] H. Brézis, *Análisis funcional: teoría y aplicaciones*, Alianza Universidad Textos, 1984.
- [5] P. Cannarsa y J. M. Coron, eds., *Control of partial differential equations*, Lecture Notes in Mathematics, 2048. Fondazione CIME/CIME Foundation Subseries. Springer, 2010.
- [6] M. de Cervantes Saavedra, *Don Quijote de la Mancha*, RAE-Alfaguara, México, 2004, Edición de IV centenario.

- [7] E. Fernández-Cara y E. Zuazua, «Las matemáticas del control», *Arbor: Ciencia, Pensamiento y Cultura*, vol. 725, 2007, 383–393.
- [8] A. Fursikov y O. Y. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations*, Lecture Notes Ser. 34, Seoul National University, Korea, 1996.
- [9] J.-P. Kernévez, *The sentinel method and its application to environmental pollution problems*, CRC Press, 1997.
- [10] G. Lebeau y L. Robbiano, «Contrôle exact de l'équation de la chaleur», *Comm. Partial Differential Equations*, vol. 20, núm. 1-2, 1995, 335–356.
- [11] H. Lomelí y B. Rumbos, «La paradoja de Euler», *Miscelánea Matemática*, vol. 57, 2013, 15–37.
- [12] O. Mayr, «The origin of feedback control», *Scientific American*, vol. 223, 1970, 110–119.
- [13] D. Merezhkovski, *El Romance de Leonardo, el genio del renacimiento*, EDHASA, Barcelona, 2000.
- [14] S. Micu y E. Zuazua, *Quelques questions de théorie du contrôle*, Collection Travaux en Cours, cap. «An introduction to the controllability of partial differential equations», 67–150, Hermann, 2005.
- [15] J. Sawday, *Engines of the imagination, renaissance culture and the rise of the machine*, Routledge, New York, 2007.
- [16] I. Stewart y M. Golubitsky, *Fearful symmetry: Is god a geometer?*, Blackwell, USA-UK, 1992.
- [17] H. Sussmann y J. C. Willems, «300 years of optimal control: From the brachysthocrone to the maximum principle», *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 17, 1997, 32–44.
- [18] J. Zabczyk, *Mathematical control theory: an introduction*, Birkhäuser, 2007.