

Efectos no lineales o ¿el estudio de los no elefantes?: Dinámica de oscilaciones

Luis A. Cisneros-Ake^{*}, Hugo Parra Prado[†],
José F. Solano Peláez[‡]

^{*}Departamento de Matemáticas, ESFM, Instituto Politécnico Nacional, Unidad Profesional Adolfo López Mateos Edificio 9, 07738 Cd. de México, México.

^{†,‡} Posgrado en Ciencias Fisicomatemáticas, ESFM, Instituto Politécnico Nacional, Unidad Profesional Adolfo López Mateos Edificio 9, 07738 Cd. de México, México.

*cisneros@esfm.ipn.mx, †hugo_sagitario_p@hotmail.com, ‡boryt_w@hotmail.com

Resumen

Presentamos, a manera introductora, a la teoría de perturbaciones como una herramienta matemática en el estudio de fenómenos no lineales, conocido en la literatura moderna como ciencia no lineal. Para exponer las ideas primarias de la teoría de perturbaciones presentamos un problema de dinámica no lineal de poblaciones sujeta a un forzamiento externo periódico. Finalmente, revisitamos el problema de Fermi, Pasta y Ulam (FPU) para un sistema finito de osciladores acoplados no linealmente y sujetos a condiciones de frontera Dirichlet. Mostramos, con un argumento simplificado de la teoría de perturbaciones, la aparición de términos resonantes que dan lugar al problema de los divisores pequeños o a la ergodicidad de la cadena de FPU. Hacemos notar que éste mismo argumento, basado en una aproximación completa de escalas múltiples, fue propuesto por Joshep Ford [7] en los inicios del planteamiento del problema FPU y antes del surgimiento formal de la teoría KAM [19]. Además, queremos mostrar como el estudio del problema FPU ha sido un paradigma en la ciencia no lineal.

2 Crónicas 1

³³ *También disertó sobre los árboles,
desde el cedro del Líbano hasta el hisopo que nace en la pared.*

*Asimismo disertó sobre los animales, sobre las aves,
sobre los reptiles y sobre los peces.*

1 Reyes 4

1. Introducción

El término *ciencia no lineal* ha sido usado de manera recurrente, hasta hace relativamente poco tiempo [16], para referirse a problemas de interés científico en donde los efectos no lineales se vuelven relevantes. Sorprende, sin embargo, que hasta antes de la década de los 60's del siglo pasado, y a pesar de que los términos no lineales fuesen *despreciables*, la gente de ciencia no había reparado en considerar dichos efectos no lineales, por lo que la inmensa mayoría de las ecuaciones de la física matemática representaban ecuaciones lineales. Un ejemplo clásico de esto último lo representa las ecuaciones no lineales de Hodgkin y Huxley, las cuales explican de manera correcta el funcionamiento del potencial de acción en el axón gigante de calamar, contrario a lo que se predecía con la ecuación lineal del cable [9].

De ésta manera, era normal pensar que la naturaleza obedecía leyes lineales y que las interacciones no lineales aparecían mas bien como una *aberración* de las ecuaciones. Esto, a pesar de que, en algunos casos, se puede pensar a los modelos (ecuaciones) no lineales como correcciones a ordenes más altos de sus contrapartes lineales. Esto matemáticamente se muestra muy claramente con la teoría de perturbación singular aplicada a algunos casos muy específicos [20]. Una comparación llana de lo que ahora estamos tratando de decir, entre los modelos lineales y los no lineales, se refleja muy notoriamente con la broma, atribuida a S. Ulam, quién decía que estudiar modelos no lineales era como estudiar la zoología de los no-elefantes, dando a entender que las no linealidades son más bien la regla que la excepción. De aquí, el título desafiante de este trabajo.

En el contexto particular de los sistemas de osciladores, como también los discutiremos más adelante, los efectos no lineales (por pequeños que estos parezcan) se vuelven relevantes y dan lugar a fenómenos nuevos e inesperados. Un paradigma en la ciencia, para este tipo de problemas, es el propuesto por Fermi, Pasta y Ulam (FPU) [6] en el contexto de oscilaciones en sistemas débilmente no lineales. El problema FPU plantea el estudio de la equipartición de energía en un sistema de osciladores con finitos grados de libertad con interacciones del tipo cúbico

en los resortes. Las respuestas que se obtienen del problema FPU son totalmente inesperadas y han dado lugar a la creación formal y completa, tal como las conocemos ahora, de nuevas áreas de la ciencia como la teoría KAM [4] y la teoría de solitones [16], entre otras. Cabe mencionar que los modelos no lineales resultan más complejos, en si mismos, de estudiar por lo que se recurre al uso de computadoras modernas para dar una respuesta a ellos (tal como de hecho lo hizo FPU). Por lo que se puede decir, genéricamente, que la ciencia no lineal establece *matemáticas experimentales*, esto es, que las respuestas o soluciones a las ecuaciones no lineales (tanto algebraicas como diferenciales) se describen, casi exclusivamente en la mayoría de los casos, de manera numérica por medios computacionales.

Es nuestro propósito mostrar la relevancia de las ecuaciones no lineales y los efectos que de ellas surgen. Para ello, comenzamos estudiando un problema simple de una presa con un depredador aparente y mostramos, por medio de argumentos asintóticos, la dinámica que se puede establecer para una presa en una situación de modelación más real.

Como parte principal de este trabajo revisitamos el problema FPU. Hacemos notar, con un cálculo simplificado de teoría de perturbaciones, la posibilidad de ocurrencia de efectos resonantes entre los osciladores (similarmente a como ocurre en el problema de los divisores pequeños), lo cual puede explicar, de alguna manera, el efecto ergódico o aleatorio de la cadena de FPU, y por tanto, la no equipartición de la energía entre los modos de oscilación de la cadena. En la parte final de este trabajo presentamos un cálculo simple sobre el límite continuo de la cadena FPU, a partir del cual se obtiene la ecuación Korteweg de Vries (KdV), y mencionamos algunas cosas de lo que de ella se desprende en la teoría de solitones. Finalmente, en la parte última damos nuestras conclusiones.

2. Presa con un depredador aparente: Una primera vista de los efectos no lineales

Para entender de manera simple los posibles efectos no lineales en un modelo matemático, consideramos un modelo simple de dinámica de poblaciones. Comencemos considerando la ecuación diferencial, $y' = \alpha y$, donde $y = y(t)$ representa la densidad de población de cierta especie en un cierto medio ambiente, mientras que α es la razón entre el tamaño de la población y la rapidez de cambio de la misma. Un cálculo simple muestra que la relación anterior exhibe un comportamiento exponencial para la densidad de población en la forma $y(t) = y_0 \exp(\alpha t)$, para una cierta densidad inicial y_0 .

Una ley de crecimiento exponencial como la anterior es conocida en ciertos contextos como la ley de Malthus, y tiene su justificación en el sentido de que las cantidades, sustancias o poblaciones (según de qué se este hablando o modelando), tienden a crecer o disminuir exponencialmente, dependiendo del signo del coeficiente α , ante la ausencia de un agente externo que las regule. En economía [12], por ejemplo, Malthus establecía la necesidad de escasez de alimentos (debido a hambrunas o problemas sociales) en comunidades de humanos como un agente regulador del tamaño de las poblaciones. Es, sin embargo, interesante comentar que Malthus extrapolaba sus ideas para justificar la existencia de desigualdades sociales en las que los estratos sociales superiores deberían de corresponder a poblaciones pequeñas y deberían de dominar sobre los estratos inferiores, los cuales deberían de corresponder al grueso de la población de una cierta comunidad. De ésta manera, en la idea de Malthus, estaba completamente justificado la alta mortandad de las poblaciones con ingreso económico bajo.

De la discusión anterior vemos, de hecho, la necesidad de considerar agentes internos y externos que regulen la dinámica de una cierta población bajo estudio, de otra manera, como también se dió cuenta el mismo Malthus, dicha población crecerá de manera desmedida saturando su medio ambiente y agotando sus recursos de supervivencia. Una primera aproximación, en éste sentido, es considerar una primera extensión de nuestro modelo inicial al suponer, en el sentido de la ley de acción de masas de la química (véase capítulo 1 de [9]), que la razón de cambio, $y'(t)$, de la población, no sólo es proporcional a la densidad de población $y(t)$ sino también a $-y^2(t)$, esto es, el tamaño mismo de la población hace que ésta se auto regule, generando un mecanismo interno de regulación. La ley de acción de masas en este sentido diría que los *contactos* de la población consigo misma (esto debido, digamos, a lo reducido del espacio físico como consecuencia del crecimiento exponencial de la especie) causa un decrecimiento de ella. Matemáticamente, esto último queda expresado por la ecuación logística:

$$y' = \alpha y - \beta y^2, \quad (1)$$

donde ahora el coeficiente $\beta > 0$ es la razón de contactos de la especie consigo misma, según la ley de acción de masas. Cabe mencionar que el modelo propuesto en (1) fue primeramente derivado (en su forma adimensional) en 1845 por Pierre–François Verhulst para representar el crecimiento biológico limitado de poblaciones.

La ecuación diferencial (1) es no lineal y de primer orden, genéricamente del tipo Riccati o particularmente del tipo Bernoulli. Integrando dicha ecuación ordinaria ya sea por separación de variables o por el

cambio de variable sugerido por Bernoulli, es fácil ver que las soluciones obedecen la relación

$$y(t) = \frac{y_0 e^{\alpha t}}{\frac{y_0 \beta}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) + 1} = \frac{\alpha y_0}{e^{-\alpha t} (\alpha - \beta y_0) + y_0 \beta}, \quad (2)$$

para un valor inicial de población y_0 . Es interesante mencionar que de hecho Verhulst primeramente encuentra la relación (2) como un estimado para el umbral de crecimiento de la población de su natal Bélgica, y de dicho comportamiento funcional deduce luego el modelo propuesto él mismo. De ésta manera, ¿se tiene uno de los resultados primeros y exactos de la ciencia no lineal!

Como es de esperar, el modelo no lineal modificado (1) hace que las soluciones (2) se saturan en el valor umbral α/β , en tiempos suficientemente grandes. Esto último es razonable con respecto a lo que vemos en sistemas poblacionales reales. Sin embargo, la dinámica monótona pierde cierto detalle de lo que vemos en la mayoría de los problemas de dinámica de poblaciones. Por ejemplo, agentes externos a la especie, como un depredador de ella o variaciones de su medio ambiente, deben crear *fluctuaciones* de su densidad poblacional. Concluimos, finalmente, que un mecanismo externo completaría nuestro modelo inicial. En general, sin embargo, uno tendría que introducir una ecuación para el *agente externo* y acoplarla, por medio de la ley de acción de masas, con la ecuación de nuestra especie. Dicho *acoplamiento* en principio puede ser no trivial y daría lugar, en general, a un problema matemático muy complicado.

Una manera simple de comprender los mecanismos *externos* que modifican el comportamiento monótono de una especie, según (2), es introducir lo que, en este escrito, llamamos el depredador aparente. Nosotros suponemos que el efecto *global* de los mecanismos externos (ya sean depredadores o regulaciones del medio ambiente sobre la especie) queda expresado en un término de forzamiento $f(t, y)$. Para precisar ideas, podemos suponer que los efectos externos actúan de manera periódica sobre la especie, ya sea debido a migraciones de la especie (o de su depredador) o debido a enfermedades, eventualmente mortales, que la especie puede adquirir en ciertas estaciones del año. Como un modelo en particular, suponemos la forma funcional $f(t, y) = \cos(\omega t)$. Por lo que nuestro modelo de dinámica poblacional más real queda expresado por:

$$y' = \alpha y - \beta y^2 + \epsilon f(t, y) = \alpha y - \beta y^2 + \epsilon \cos(\omega t), \quad (3)$$

donde el parámetro de perturbación ϵ controla el tamaño del efecto externo.

La ecuación (3) es ya una ecuación completa de Riccati y se puede ver, después de analizarla un rato, que no es posible resolverla, de manera cerrada, por métodos analíticos tradicionales. Estamos pues ante un problema matemático complejo que nos exige más herramienta matemática para tratarlo, esto, debido a los ingredientes de modelación que consideramos previamente para considerar situaciones más reales de la aplicación. Nos proponemos ahora resolver por medios aproximativos cuasi analíticos, del tipo asintótico, la relación no lineal (3). Para éste efecto, presentamos primeramente la técnica en un problema algebraico.

2.1 Un ejemplo de perturbación regular polinomial

Ilustramos el método de perturbaciones considerando el problema de encontrar (aproximar) a la única raíz real de la ecuación cúbica $x^3 - x + 1 = 0$. Pensando que desconociéramos el método de Tartaglia–Cardano para encontrar analíticamente a las tres soluciones, en el conjunto de los números complejos, de dicha ecuación o que es muy difícil evaluar los radicandos y/o distinguir de entre ellas a la única solución real, nos proponemos encontrar de manera aproximada la solución real de nuestro interés. Siguiendo una filosofía de resolver lo que podemos, esto es, problemas matemáticos más simples, nos proponemos introducir un parámetro de *perturbación* y estudiar el problema modificado $x^3 - \epsilon x + 1 = 0$, para obtener la familia uniparamétrica de soluciones $x(\epsilon)$. De ésta manera tendremos la respuesta a nuestra pregunta original para cuando $\epsilon = 1$ y sabemos responder en el caso simple $\epsilon = 0$, esto es, $x(0) = x_0 = -1$, la cual corresponde de hecho a la única raíz real de nuestra ecuación.

Esperamos que nuestra ecuación algebraica perturbada provee soluciones $x(\epsilon)$ que dependen continuamente del parámetro ϵ . De ésta manera, derivando implícitamente a la ecuación perturbada con respecto al parámetro ϵ , encontramos que:

$$x'(\epsilon) = \frac{x(\epsilon)}{3x^2(\epsilon) - \epsilon}. \quad (4)$$

Continuamos ahora, desde $\epsilon = 0$, a nuestra familia uniparamétrica de soluciones por medio de la expansión de Taylor de la forma,

$$x(\epsilon) = x(0) + \epsilon x'(0) + \dots = x_0 + \epsilon x_1 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n x_n. \quad (5)$$

Encontramos así que, a primer orden en ϵ , $x(\epsilon) = -1 - \frac{1}{3}\epsilon$. Por lo que en $\epsilon = 1$, $x = -\frac{4}{3} = -1.33\dots$ es el valor aproximado a la única raíz

real. Evaluando las fórmulas de Tartaglia-Cardano podemos verificar que la única raíz real es:

$$x(\epsilon) = \sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{4\epsilon^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-1 - \sqrt{1 - \frac{4\epsilon^3}{27}}}{2}}, \quad (6)$$

la cual da $x = -1.3247\dots$ en $\epsilon = 1$, y corroboramos lo bueno de nuestra aproximación obtenida con un argumento de Taylor muy simple. Por otro lado, por sorprendente que parezca, el lado derecho de la relación anterior coincide a primer orden con $-1 - \frac{1}{3}\epsilon$.

Antes de concluir esta subsección hacemos notar que aproximaciones a ordenes más altos son posibles de obtenerse de la relación (5), por medio de la determinación de los coeficientes x_n . Estos se pueden obtener al reemplazar la serie completa (5) en la ecuación perturbada $x^3 - \epsilon x + 1 = 0$ y escribir dicha identidad algebraica como una ecuación polinomial en ϵ , cuyos coeficientes determinan ecuaciones para los términos x_n que se resuelven de manera recursiva. Para formalizar un poco el desarrollo aproximativo anterior, finalizamos con la siguiente definición.

Definición 2.1. Decimos que el problema perturbado $P^\epsilon(x) = 0$ es un problema de perturbación regular si $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(\epsilon) = x_0$, donde $x(\epsilon)$ es solución de $P^\epsilon(x) = 0$ y x_0 es solución del problema sin perturbar $P^0(x) = 0$. En caso contrario, esto es, que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x(\epsilon)$ no existe o converge a algo distinto de x_0 , decimos que $P^\epsilon(x) = 0$ es un problema de perturbación singular.

2.2 Aproximación asintótica al problema del depredador aparente

Retomamos ahora el problema diferencial perturbado (3), visto en la forma $0 = P^\epsilon(y) = -y' + \alpha y - \beta y^2 + \epsilon \cos(wt)$. Siguiendo las ideas anteriormente expuestas, suponemos una expansión de la solución perturbada en la forma:

$$y(t, \epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n y_n(t). \quad (7)$$

Sustituyendo la expansión anterior en (3) a primer orden, esto es reemplazando $y(t, \epsilon) = y_0(t) + \epsilon y_1(t)$, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas:

$$\epsilon^0 : y'_0 = \alpha y_0 - \beta y_0^2, \quad y_0(0) = A, \quad (8)$$

$$\epsilon^1 : y'_1 = \alpha y_1 - 2\beta y_0 y_1 + \cos(wt), \quad y_1(0) = 0, \quad (9)$$

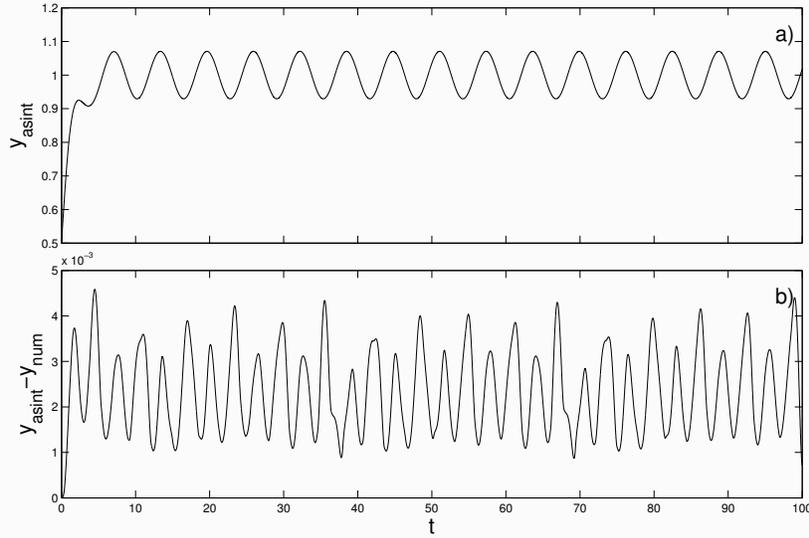


Figura 1. a) Solución asintótica $y_{asint}(t) = y_0(t) + \epsilon y_1(t)$ para $A = 0.5$, $w = \alpha = \beta = 1$ y $\epsilon = 0.1$. b) Error absoluto respecto a la solución numérica obtenida por medio del método de Runge–Kutta de cuarto orden.

donde A es la condición inicial del problema completo (3) y la condición inicial para el término correctivo $y_1(t)$ se ha fijado a cero, esto para cargarle la condición inicial al término de orden uno, $y_0(t)$, y tengamos la expansión correcta en (7) para $t = 0$.

Notamos inmediatamente que el problema no lineal (8) ya ha sido resuelto en (1) con solución (2), donde hemos reemplazado la notación para la condición inicial en la forma $y_0 = A$. Por otro lado, el problema (9) corresponde a una ecuación lineal (una vez que se ha encontrado la función $y_0(t)$) y puede ser resuelto de manera explícita, por medio del método del factor integrante, en la forma:

$$\begin{aligned}
 y_1(t) = & \frac{\alpha^2 (\alpha - 2A\beta)}{w^2 + \alpha^2} \frac{e^{\alpha t}}{[\alpha + \beta A (e^{\alpha t} - 1)]^2} \\
 & + \frac{\alpha (2A\alpha\beta - \alpha^2 + A^2\beta^2 (e^{2\alpha t} - 1))}{(w^2 + \alpha^2) [\alpha + \beta A (e^{\alpha t} - 1)]^2} \cos(\omega t) \\
 & + \frac{2A\alpha^2\beta(\alpha - \beta A)e^{\alpha t} + w^2 (\alpha + A\beta(e^{\alpha t} - 1))^2}{w (w^2 + \alpha^2) [\alpha + \beta A (e^{\alpha t} - 1)]^2} \sin(\omega t). \quad (10)
 \end{aligned}$$

Para propósitos ilustrativos, mostramos en la figura 1a) la evolución temporal de nuestra aproximación asintótica $y_{asint}(t, \epsilon) = y_0(t) + \epsilon y_1(t)$ para los parámetros del modelo $\alpha = \beta = w = 1$ y el parámetro de perturbación $\epsilon = 0.1$. En la figura 1b) podemos notar que tenemos

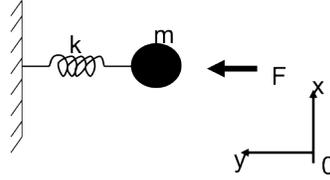


Figura 2. Sistema masa–resorte.

globalmente tres decimales exactos con respecto a la solución numérica, $y_{num}(t)$, obtenida usando el método de Runge–Kutta de cuarto orden.

Concluimos el análisis del modelo completo (3) diciendo que éste presenta un transitorio inicial hacia el valor de saturación, α/β , para después presentar oscilaciones periódicas alrededor de dicho valor de saturación, esto debido al término forzante periódico $f(t, y) = \cos(\omega t)$. Consideramos así, que un modelo como el (3) refleja una situación más real en el que la especie ni se extingue ni se queda saturada en su medio ambiente, sino que sigue una dinámica oscilatoria de subsaturación y sobresaturación debido a agentes tanto internos como externos a la especie.

Como comentario final para esta parte, debemos comentar que las correcciones a ordenes más altos en ϵ impone ecuaciones ordinarias lineales acopladas de forma recursiva, cuyo grado de complicación depende de los coeficientes y el término no homogéneo, por lo que será factible, en principio, obtener términos correctivos, $y_n(t)$, a orden alto.

3. Oscilaciones no lineales y sus efectos

Como vimos en el modelo de la sección anterior, la dinámica de oscilaciones plantea una variedad de fenómenos en distintos contextos de aplicación [2], esto debido a que muchos problemas de interés se corresponden a sistemas de osciladores de masas y resortes.

Como una primer aproximación a la fenomenología que puede ocurrir en la dinámica de oscilaciones consideramos la paradoja de Galileo. Esta establece que las oscilaciones periódicas, establecidas por un péndulo simple digamos, son independientes de la amplitud de oscilación. Obviamente dicha paradoja tiene lugar debido a que se considera un sistema mecánico armónico correspondiente a desplazamientos pequeños del péndulo, como el mostrado en la figura 2. Para exhibir tal paradoja, consideremos una corrección anarmónica al potencial de Hooke, la cual permita una validez para desplazamientos relativamente más grandes. La ecuación para la energía mecánica total, en este caso, se expresa en

la forma:

$$E = K + V = \frac{1}{2}my'^2 + \frac{k}{2}y^2 - \frac{k\alpha}{2}y^4 = cte = \frac{k}{2}A^2 - \frac{k\alpha}{2}A^4, \quad (11)$$

para la amplitud de oscilación A , la constante de Hooke k del resorte y la corrección anarmónica α . Es inmediato, entonces, que la ecuación de movimiento en cuestión se corresponde con $my'' = -ky + 2k\alpha y^3$. Una primera integración produce la relación:

$$\begin{aligned} \frac{T}{4} \sqrt{\frac{k}{m}} &= \sqrt{\frac{k}{m}} \int_0^{\frac{T}{4}} dt = \sqrt{\frac{k}{m}} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{dy}{y'} \\ &= \int_A^0 \frac{dy}{\sqrt{-y^2 + A^2 + \alpha y^4 - \alpha A^4}}, \quad (12) \end{aligned}$$

entre la amplitud A y el período de oscilación T de las órbitas solución de nuestro oscilador no lineal.

Siendo α un término correctivo pequeño, una expansión de Taylor a primer orden, en dicho parámetro de corrección, para el integrando de la relación previa, permite expresar de manera explícita el efecto del término correctivo anarmónico en la forma:

$$\frac{T}{4} \sqrt{\frac{k}{m}} = \int_A^0 \frac{dy}{\sqrt{A^2 - y^2}} - \frac{\alpha}{2} \int_A^0 \frac{y^4 - A^4}{(A^2 - y^2)^{3/2}} dy = \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{3\pi}{8} A^2, \quad (13)$$

por lo que la paradoja queda exhibida y vemos que el efecto real esperado es que suceda $T = T(A)$, debido al efecto no lineal. De ésta manera es incorrecta la aproximación armónica de los osciladores debido a que aún siendo pequeña la corrección anarmónica, ésta permite explicar lo que uno realmente ve en la realidad.

3.1 La cadena FPU

Estamos ahora en posición de discutir un sistema finito no lineal de osciladores con condiciones de frontera Dirichlet, ampliamente conocido en la literatura como el problema FPU. Dicho problema FPU es considerado un paradigma de lo que actualmente se conoce como ciencia no lineal, y es la parte esencial de la presente exposición en la que pretendemos exhibir diferentes fenómenos debidos a la interacción no lineal en dicho sistema de osciladores. La historia es como sigue.

El gran físico Enrico Fermi siempre estuvo fascinado por el misterio fundamental de la mecánica estadística, conocido como la flecha del tiempo. En pocas palabras, dicho misterio planteaba la posibilidad de si un sistema con muchos grados de libertad pudiese retornar a estados anteriores de su evolución temporal. Para ejemplificar esta cuestión, pensemos, por ejemplo, que filmamos la colisión de dos bolas de billar

que evolucionan, después de la colisión, viajando en distintas direcciones. Nos parecería natural la evolución que observamos si reproducimos nuestra grabación hacia atrás, esto debido a que las ecuaciones de movimiento, para las bolas de billar, obtenidas de las leyes de Newton, funcionan igualmente para tiempos positivos que negativos. Supongamos ahora que jugamos American Pool, donde requerimos de 15 bolas de billar arregladas en reposo dentro de un triángulo, y que filmamos la colisión de la bola blanca contra el grupo de bolas de billar. Es claro que la reproducción hacia atrás de nuestra grabación plantea una evolución de las masas (bolas de billar) que es difícil de reproducir mecánicamente desde su estado final hacia el estado inicial de su arreglo triangular. Esto a pesar de que, en principio, las leyes que gobiernan todas las colisiones funcionan igualmente como en el caso de la colisión de dos masas.

Afortunadamente, Fermi estuvo en Los Alamos en los inicios de los 1950's y pudo tener acceso a una de las primeras computadoras digitales llamada MANIAC (Mathematical Numerical Integrator And Computer), la cual permitía por primera vez a los científicos hacer cálculos numéricos a fuerza bruta y desarrollar, lo que en algunos contextos, se hace llamar matemática experimental [3]. Fermi juntó entonces a John Pasta y Stanislaw Ulam (ambos en Los Alamos también, y de aquí el acrónimo FPU) para estudiar el concepto de la flecha del tiempo. Fermi tenía la idea clara de que los mecanismos detrás del concepto eran los muchos grados de libertad y ¡la no linealidad! De esta manera Fermi se planteó un sistema dinámico simple de masas conectados por resortes, en el cual el único movimiento permitido era aquel a lo largo de la cadena de resortes y en donde efectos de fricción y calentamiento externo eran omitidos. La idea central de Fermi fue considerar correcciones anarmónicas, del tipo cúbico, en los resortes de la cadena de osciladores. El traslado del concepto de la flecha del tiempo al sistema mecánico de Fermi era en términos de que tanto tiempo le tomaría a las oscilaciones no lineales de los resortes retornar a su equilibrio. Dicho equilibrio lo pensaba Fermi como el que se ve en el equilibrio térmico de los gases homogéneos, en el cual la energía térmica esta igualmente distribuida en cada una de sus moléculas y a lo largo de cada una de sus componentes dimensionales [14]. Este último concepto era conocido también como el teorema de la equipartición de energía de la mecánica estadística.

Veamos a cierto detalle el conjunto de fenómenos que surgen del problema FPU. Empecemos por considerar un sistema finito de osciladores para un potencial de interacción arbitrario $V(r)$. La segunda y tercera leyes de Newton establecen las ecuaciones de movimiento para cada una

de las masas, descritas por el desplazamiento relativo y_n , en la forma:

$$m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} = V'(y_{n+1} - y_n) - V'(y_n - y_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (14)$$

Suponemos los extremos fijos de la cadena de osciladores, esto es condiciones de frontera Dirichlet, $y_0(t) = y_{N+1}(t) = 0$. En el límite armónico (esto es $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$, con k constante de los resortes) de una cadena homogénea en la que todas las masas m_n son iguales a m , el sistema de ecuaciones anterior se reduce a,

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = k(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

Un cálculo directo aunque no tan corto, ya sea por el método de las ondas planas o por medio del álgebra de las matrices, muestra que la solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias linealmente acopladas (15), sujeto a la condición de Dirichlet en la frontera, esta dada por

$$y_n(t) = \sum_{l=1}^N c_n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi l n}{N+1} \right) \cos(w_l t + \delta_l), \quad (16)$$

donde $w_l = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi l}{2(N+1)} \right)$ para $l = 1, 2, \dots, N$ son las distintas frecuencias en cada uno de los osciladores que componen nuestra cadena, y constantes de integración c_n obtenidas de condiciones iniciales prescritas de la cadena.

En la solución (16) para la n -ésima masa vemos como los N distintos modos de oscilación, descritos en el l -ésimo modo por $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi l n}{N+1} \right)$, se superponen. Mostrando esto último el rasgo característico de los sistemas armónicos. Podemos caricaturizar lo simple que pueden ser las cadenas lineales, como la ahora estudiada, diciendo que el principio de superposición permite interpretar que inmediatamente después de que los osciladores se ponen a vibrar, desde su condición inicial, se observa como si los osciladores se *soltaran entre sí*, esto es como si se desacoplaran. Pues, como podemos ver, la solución (16) para el n -ésimo oscilador, descrito por y_n , ¡es independiente de los otros osciladores! De esta manera, es claro que el teorema de equipartición de la energía tiene lugar en este tipo de sistemas. Es aquí crucial mencionar que al conocer los efectos lineales de un problema como el de los osciladores, y creer que éstos son los que describen la fenomenología completa, pueden inducir a un engaño. Esto es, creer que los efectos lineales son la regla y no la excepción puede ser fatal, como ya lo mencionamos con la paradoja de Galileo y el modelo de las especies.

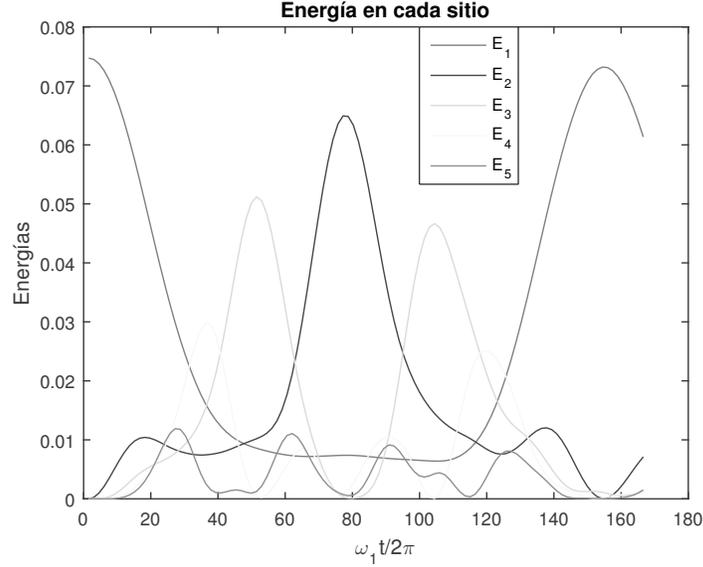


Figura 3. Cuasi recurrencia de la energía en los primeros cinco sitios de la cadena anarmónica para $N = 32$ sitios.

Fermi entendía lo anteriormente descrito y quizó probar lo que ocurre en los sistemas lineales en un sistema débilmente anarmónico específico. Para ello, FPU consideraron una corrección cúbica pequeña en el potencial armónico de interacción, esto es $V(r) = \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{3}k\alpha r^3$. De esta manera las ecuaciones de movimiento quedan ahora descritas por:

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = k (y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) [1 + \alpha (y_{n+1} - y_{n-1})], \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (17)$$

En el experimento de FPU se considera $\alpha = 0.25$, $N = 32$ y $N = 64$ junto con la condición inicial correspondiente a la excitación del modo más bajo de oscilación desde la posición de reposo, esto es $y_n(0) = B \sin\left(\frac{\pi n}{N+1}\right)$ y $y'_n(0) = 0$.

Una manera de comprender las posibles fluctuaciones de la energía entre los diferentes sitios de la cadena de osciladores es reescribir la energía mecánica en las variables de ángulo y acción, descritas por las variables de Fourier. De esta manera consideramos un cambio de variables por medio de la transformada seno discreto de Fourier [17] para obtener la energía en el n -ésimo sitio,

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{m}{2} y_n'^2 + \frac{k}{2} (y_{n+1} - y_n)^2 + \frac{k\alpha}{3} (y_{n+1} - y_n)^3 \\ &= \frac{1}{2} \left(A_n'^2 + \omega_n'^2 A_n^2 \right) + \frac{\alpha}{3} (c_{nlr} A_n A_l A_r \omega_n \omega_l \omega_r), \end{aligned} \quad (18)$$

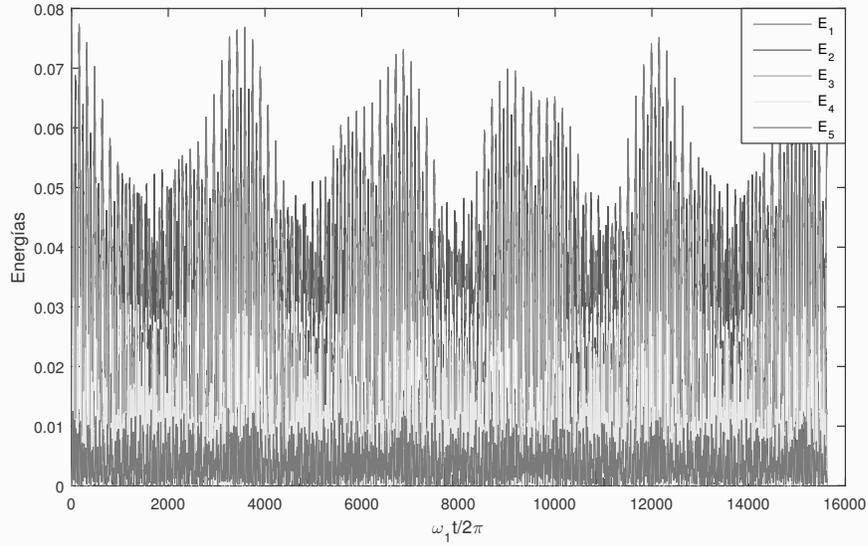


Figura 4. Súper recurrencia de la energía en los primeros cinco sitios de la cadena anarmónica para $N = 32$ sitios.

donde $\omega_k^2 = 4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k\pi}{2(N+1)} \right)$ y $A_k = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{i=1}^N y_i \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi i}{N+1} \right)$.

Se puede mostrar además que $\sum_{s,r,l=1}^N c_{r,l,s} \omega_r \omega_l \omega_s = 0$, por lo que en el cálculo numérico de la energía en el sitio n se puede omitir, al ser pequeño, el último término de (18). El primer gran efecto no lineal tiene lugar: en la figura 3 mostramos la evolución de la energía, para las primeras cinco masas, obtenida de la evolución numérica completa del sistema (17) para $\alpha = 0.5$ y $N = 32$. Podemos ver que la energía inicial casi se recupera después de alrededor de 160 ciclos o evoluciones. De hecho hay un déficit de la energía del orden del 3%. Esta es la primer gran sorpresa que se llevó Fermi [6].

Años más tarde, en 1972, James L. Tuck y Tsingou [18] (ahora con apellido de casada Menzel, y quién de hecho participó en los experimentos numéricos de FPU pero que no fue mencionada en el reporte desclasificado de Los Alamos de 1955), pusieron a prueba el experimento numérico de FPU para mostrar si es que se requerían simulaciones más largas para eventualmente ver la esperada recurrencia o equipartición de la energía. Ellos encontraron que efectivamente, después de demasiados ciclos, llamado por ellos súper recurrencias, seguía sin cumplirse de manera precisa el principio de equipartición de la energía (véase figura 4), ya que siempre había cuasi recurrencias y en algunos ciclos con pérdidas muy grandes en las energías.

Para comprender un poco estos efectos extraños en la cadena FPU usemos, como antes, la teoría de perturbaciones. Vamos a suponer que $\epsilon = \alpha$ es un parámetro pequeño de perturbación para la cadena armónica estudiada de hecho en (15). De esta manera, como ya hemos justificado en la sección anterior, similarmente a (7), podemos suponer una expansión en la forma:

$$y_n(t) = \sum_{l=0}^{\infty} y_n^l(t) \epsilon^l, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

Siguiendo la metodología descrita anteriormente, ordenamos los ordenes de la expansión para obtener, a primer orden, el sistema lineal acoplado de ecuaciones ordinarias:

$$\epsilon^0 : \frac{d^2 y_n^0}{dt^2} - \frac{k}{m} (y_{n-1}^0 - 2y_n^0 + y_{n+1}^0) = 0, \quad (20)$$

$$\epsilon^1 : \frac{d^2 y_n^1}{dt^2} - \frac{k}{m} (y_{n-1}^1 - 2y_n^1 + y_{n+1}^1) = g_n(t), \quad (21)$$

sujetas a las condiciones iniciales $y_n^0(0) = B \operatorname{sen} \left(\frac{\pi n}{N+1} \right)$, $\frac{d}{dt} y_n^0(0) = 0$

y $y_n^1(0) = \frac{d}{dt} y_n^1(0) = 0$. Por otro lado, de acuerdo a la solución (16) se tiene para el término no homogéneo,

$$\begin{aligned} g_n(t) &= \frac{d^2 y_n^0}{dt^2} (y_{n+1}^0 - y_{n-1}^0) \\ &= -\frac{1}{2} w_1^2 B^2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{N+1} \right) [1 + \cos(2w_1 t)] \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi n}{N+1} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Haciendo un esfuerzo extra podemos resolver [15], por medio de la variación de parámetros en sistemas lineales, para el siguiente término correctivo $y_n^1(t)$, según la ecuación (21), para obtener:

$$\begin{aligned} y_n^1(t) &= \left[-\frac{A}{w_2^2} + \frac{A}{4w_1^2 - w_2^2} \cos(2w_1 t) \right. \\ &\quad \left. + 2A \frac{2w_1^2 - w_2^2}{w_2^2(4w_1^2 - w_2^2)} \cos(w_2 t) \right] \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi n}{N+1} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{w_1^2 B^2}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{N+1} \right), \quad w_1^2 = 4 \frac{k}{m} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2(N+1)} \right), \\ w_2^2 &= 4 \frac{k}{m} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{2\pi}{2(N+1)} \right) = 4 \frac{k}{m} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{(N+1)} \right). \end{aligned}$$

En este punto podemos empezar a entender el porque de las cuasi recurrencias y las súper recurrencias antes descritas. Pero primero,

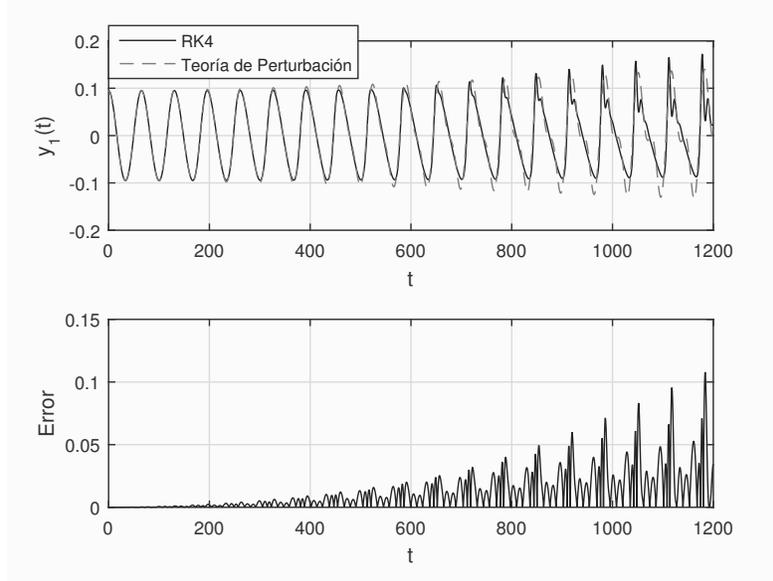


Figura 5. Comparación de la solución asintótica y numérica en $n = 1$ para $\alpha = 0.25$ y $N = 32$.

debemos destacar que en este cálculo simple de asintótica hemos descartado posibles correcciones perturbativas a las fases y sólo hemos considerado correcciones a las acciones y_n , lo cual esta en contraste con un cálculo de asintótica completo de escalas múltiples [11], [10]. Sin embargo, y debido principalmente al cúmulo de cálculos, la asintótica simple antes descrita nos hace ver un fenómeno importante (conocido de hecho en lenguaje moderno como el problema de los divisores pequeños [19]): si consideramos el ejemplo clásico de FPU de las $N = 32$ masas, encontramos entonces que $4w_1^2 - w_2^2 = (2w_1 + w_2)(2w_1 - w_2)$ y de aquí

$$\begin{aligned} 2w_1 - w_2 &= 4 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2(N+1)} \right) - 2 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{2(N+1)} \right) \\ &= 4 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{66} \right) - 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{33} \right) \\ &= 0.00021557668 \dots \end{aligned}$$

De esta manera el término correctivo $y_n^1(t)$ en $y_n(t) = y_n^0(t) + \epsilon y_n^1(t)$, según (23), se vuelve grande para cada n . Esto último ocasiona que el sistema de osciladores de FPU eventualmente se vuelva ergódico y la evolución temporal de sus masas se comporte de manera errática, tal como puede ocurrir en el problema de los divisores pequeños de la teoría KAM (véase [4] para un estudio completo de teoría KAM y el problema de los divisores pequeños). Es por esta razón del comportamiento extraño como ya hemos dicho encontraron el mismo FPU y luego Tuck y

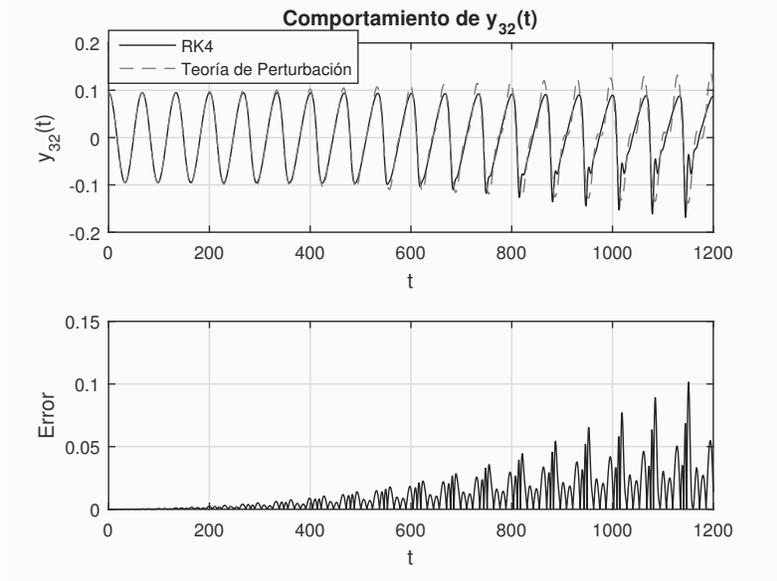


Figura 6. Comparación de la solución asintótica y numérica en $n = 32$ para $\alpha = 0.25$ y $N = 32$.

Menzel. Cabe mencionar que un cálculo completo de escalas múltiples fue hecho por Joshep Ford [7], [8], casi inmediatamente después de que se conocieron los resultados de FPU.

En las figuras 5 y 6 mostramos la evolución temporal de la solución asintótica y la obtenida por medios numéricos de Runge–Kutta de cuarto orden para $\alpha = 0.5$ y $N = 32$ en los sitios $n = 1$ y $n = 32$, respectivamente. En ambas figuras podemos ver el pequeño error numérico cometido para tiempos suficientemente grandes, desafortunadamente no tan grandes para ver incluso la primer recurrencia. Sin embargo, es claro que las oscilaciones son bastante bien predichas por el cálculo de asintótica y de hecho cuando empiezan a aparecer los cuasiperiodos (esto es, periodos arbitrariamente cerca a un periodo esperado) de las soluciones numéricas, la asintótica trata de perseguirlos. Pensamos que esto es debido precisamente al efecto de los divisores pequeños.

3.2 Límite KdV y la teoría de solitones

Para completar la relevancia de los fenómenos no lineales, y en particular, los surgidos en la cadena FPU, consideramos el límite continuo de la cadena FPU para cuando hay un número infinito de osciladores en la ecuación no lineal cúbica de FPU (17). Para este propósito introducimos los siguientes parámetros, en términos del espaciado h entre las

masas (sitios) de la cadena, en la forma:

$$kh = \xi, \quad \frac{m}{h} = \eta,$$

donde η es la densidad lineal de masa para cada una de las masas y ξ es la constante del resorte para un pedazo de cadena de longitud unitaria. Para valores muy pequeños de h la ecuación de movimiento (17) puede ser reescrita, a segundo orden en h , en la forma:

$$\frac{\eta}{\xi} y_{tt} = y_{xx} + 2h\alpha y_x y_{xx} + \frac{h^2}{12} y_{xxxx}, \quad (24)$$

donde hemos considerado $y_n(t) = y(nh, t) = y(x_n, t) = y(x, t)$. Hacemos notar que la identidad (24) no es realmente un límite continuo propiamente hablando sino mas bien una aproximación asintótica para valores muy pequeños de h , donde los términos h^3 y más altos son despreciados. Debemos también mencionar que la ecuación (24) tiene la estructura de la ecuación de Boussinesq [5] ¡de la mecánica de fluidos! Por lo que tenemos una conexión de un problema de mecánica clásica con uno de los fluidos.

La ecuación (24) es linealmente inestable para números de onda relativamente grandes. Para obtener soluciones estables, consideramos la propagación unidireccional de las ondas solución (conocido como el límite de Zabusky–Kruskal [13]). Para ello, definimos el parámetro de la velocidad del sonido de las ondas $v_s^{-2} = \eta/\xi$ e introducimos la coordenada de onda viajera $z = x - v_s t$, además del escalamiento $\tau = \frac{v_s h^2}{24} t$, para obtener:

$$\frac{h^2}{12} y_{\tau z} + \frac{h^4}{24^2} y_{\tau\tau} + \frac{h^2}{2} y_z y_{zz} + \frac{h^2}{12} y_{zzzz} = 0. \quad (25)$$

Donde hemos considerado $\alpha = h/4$. La aproximación concluye reteniendo términos a segundo orden en la relación anterior, y considerando el cambio de variable $u = y_z$, para obtener, la también famosa, ecuación Korteweg–de Vries (KdV):

$$u_\tau + 6uu_z + u_{zzz} = 0. \quad (26)$$

Cabe mencionar que del surgimiento del problema FPU casi inmediatamente vino el surgimiento de la teoría de solitones con la ecuación KdV (26) como su ejemplo primario, y con

$$u(z, \tau) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (z - c\tau - z_0) \right]. \quad (27)$$

como su solitón, viajando a velocidad constante c .

Terminamos diciendo que la teoría de solitones justifica de manera formal la existencia del solitón, en la ecuación no lineal correspondiente,

y requiere un análisis detallado profundo por separado [1]. El objetivo nuestro aquí fue mostrar la relación con el problema fundamental de FPU y como se empiezan a conectar áreas de la matemática aparentemente ajenas y el surgimiento de otras. Esto no sería posible sin considerar los efectos no lineales de la naturaleza (modelos), aunque estos sean aparentemente despreciables. Por lo que, como mencionamos decía Ulam, debemos ver a la matemática como veríamos a la zoología: como el estudio de los no elefantes.

Conclusiones

Hemos presentado a la teoría de perturbaciones como una herramienta matemática útil para exhibir detalles de los efectos que surgen, de manera correctiva, en las interacciones no lineales. Hemos hecho notar además el problema FPU como un paradigma en ciencia no lineal que dió explicaciones a algunos problemas en algunas áreas de la ciencia como la teoría KAM y su problema de los divisores pequeños, y al surgimiento de otras áreas de la ciencia como la teoría de solitones o sistemas integrables continuos o discretos como su parte central.

Agradecimientos: Los autores agradecen a los organizadores de la sesión de miscelánea matemática, del XLIX Congreso Nacional de la SMM, por la oportunidad de exponer las ideas del presente trabajo. L.A. Cisneros-Ake agradece el apoyo otorgado por el proyecto IPN-CGPI-20160873.

Bibliografía

- [1] M. J. Ablowitz y P. A. Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*, Cambridge University Press, 1991.
- [2] O. M. Braun y Y. S. Kivshar, *The Frenkel-Kontorova model: Concepts, Methods and Applications*, Springer, 2004.
- [3] D. Campbell, D. Farmer, J. Crutchfield y E. Jen, «Experimental Mathematics: The Role of Computation in Nonlinear Science», *Commun. ACM*, vol. 28, núm. 4, 1985, 374–384.
- [4] R. de la Llave, *A tutorial on KAM theory*, University Lecture Series, vol. 32, AMS, 2003.
- [5] L. Debnath, *Nonlinear water waves*, Academic Press, 1994.
- [6] E. Fermi, J. R. Pasta y S. M. Ulam, «Studies of nonlinear problems», 1955, Los Alamos scientific laboratory report LA-1940.
- [7] J. Ford, «Equipartition of Energy for Nonlinear Systems», *Journal of Mathematical Physics*, vol. 2, núm. 3, 1961, 387–393.
- [8] J. Ford y J. Waters, «Computer Studies of Energy Sharing and Ergodicity for Nonlinear Oscillator Systems», *Journal of Mathematical Physics*, vol. 4, núm. 10, 1963, 1293–1306.

- [9] J. Keener y J. Sneyd, *Mathematical physiology I: Cellular physiology*, Interdisciplinary applied mathematics, Springer, 2009.
- [10] J. Murdock, J. Sanders y F. Verhulst, *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, Springer, 2000.
- [11] A. H. Nayfeh, *Perturbation methods*, Wiley-VCH, 2004.
- [12] P. Nikitin, *Manual de economía política*, Ediciones Estudio, 1973.
- [13] R. S. Palais, «The symmetries of solitons», *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 34, 1997, 339–403.
- [14] M. A. Porter, N. J. Zabusky, B. Hu y D. K. Campbell, «Fermi, Pasta, Ulam and the birth of experimental mathematics», *American Scientist*, vol. 97, 2009, 214–221.
- [15] H. P. Prado, «Tesis de licenciatura», 2015, ESFM-IPN.
- [16] A. C. Scott, *The nonlinear universe: Chaos, Emergence, Life*, Springer, 2007.
- [17] L. Trefethen, *Spectral Methods in Matlab*, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [18] J. L. Tuck y M. T. Menzel, «The super period of the nonlinear weighted string (FPU)», *Adv. Math.*, vol. 9, 1972, 399–407.
- [19] T. P. Weissert, *The genesis of simulation in dynamics*, Springer, 1997.
- [20] G. B. Whitham, *Linear and nonlinear waves*, Wiley-Interscience publication, 1974.