

# El espacio de fines de un grupo y la teoría geométrica de grupos

Noé Bárcenas Torres  
Centro de Ciencias Matemáticas UNAM  
Apartado Postal 61-3 Xangari, 58089  
Morelia Michoacán, México  
barcenas@matmor.unam.mx

Andres Barei Bueno  
Facultad de Ciencias UNAM  
Circuito Exterior, C.U.  
04510, México D.F.  
andres.barei@gmail.com

Daniel López Aguayo  
Centro de Ciencias Matemáticas UNAM  
Apartado Postal 61-3 Xangari, 58089  
Morelia Michoacán, México  
dlopez@matmor.unam.mx

## Resumen

En estas notas presentaremos una introducción al concepto de espacio de fines en un grupo y a la teoría geométrica de grupos. Verificaremos el resultado clásico de que un grupo finitamente generado tiene 0, 1, 2 o un número infinito de fines.

## 1. Introducción

La teoría geométrica de grupos consiste en el estudio de las propiedades de grupos finitamente generados a través de las conexiones entre propiedades algebraicas del grupo, y propiedades algebraicas o geométricas de espacios donde el grupo actúa. En otro orden de ideas, la teoría

geométrica de grupos también se vale del importante hecho de que en sí mismos, los grupos encierran una estructura geométrica, determinada por su gráfica de Cayley. En este texto daremos algunos ejemplos de ideas de esta teoría relacionadas con estos dos enfoques. El principal resultado de estas notas será el teorema 1.1 transcrito a continuación:

**Teorema 1.1.** *Todo grupo finitamente generado tiene 0,1,2 o una cantidad infinita de fines.*

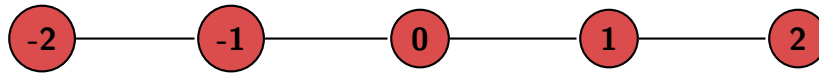
Entre las referencias introductorias a esta teoría podemos encontrar el proyecto de notas [7] y los libros [3] y [8], así como los compendios [1], [2], [4] y [5]. Presentaremos una de las ideas fundamentales de la teoría geométrica de grupos, la geometría de la gráfica de Cayley de un grupo finitamente generado.

## 2. Grupos como espacios métricos

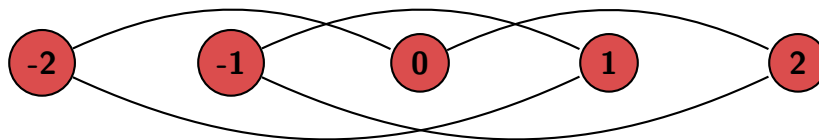
**Definición 2.1.** Sea  $G$  un grupo finitamente generado y sea  $S \subseteq G$  un conjunto de generadores de  $G$ . La *gráfica de Cayley* de  $G$  con respecto al conjunto de generadores  $S$  es la gráfica  $Cay(G, S)$  donde el conjunto de vértices es  $G$  y el conjunto de aristas es  $\{\{g, g \cdot s\} \mid g \in G, s \in S \setminus \{e\}\}$  siendo  $e$  el elemento identidad de  $G$ .

Es decir, colocamos una arista entre dos elementos del grupo si y sólo si difieren por un elemento del conjunto de generadores del grupo.

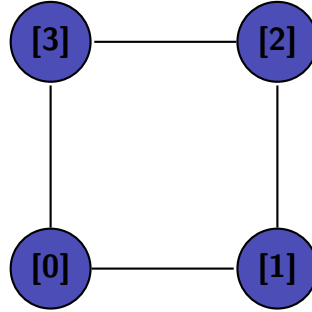
**Ejemplo 2.2.** El conjunto de los números enteros  $\mathbb{Z}$  es un grupo aditivo finitamente generado por  $\{1\}$ . Con respecto a este conjunto de generadores, la gráfica de Cayley  $Cay(\mathbb{Z}, \{1\})$  es la siguiente:



**Ejemplo 2.3.** Notemos que el grupo aditivo  $\mathbb{Z}$  también está generado por el conjunto  $\{2, 3\}$ . Con respecto a este conjunto de generadores la gráfica de Cayley  $Cay(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$  es la siguiente:



**Ejemplo 2.4.** La gráfica de Cayley del grupo de clases residuales  $\mathbb{Z}_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$  con respecto al conjunto generador  $\{[1]\}$  es el siguiente cuadrado:



Para obtener muchos ejemplos más de grupos, debemos introducir las nociones de grupo libre y presentaciones de grupos. Sea  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  un conjunto. Consideramos  $\bar{S} = \{\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n\}$  una copia ajena del conjunto  $S$ ; este es llamado el conjunto de inversos formales. Denotamos por  $W(S)$  al conjunto de palabras generadas por los elementos de  $S \cup \bar{S}$ , es decir,  $W(S)$  es el conjunto de sucesiones finitas de elementos en  $S \cup \bar{S}$ . Luego, generamos una relación de equivalencia en  $W(S)$  a partir de las siguientes relaciones: dos palabras  $(a_1 a_2 \dots a_n)$  y  $(a_1 a_2 \dots a_{i-2} a_{i+1} a_{i+2} \dots a_n)$  están relacionadas si  $a_i = \bar{a}_{i-1}$  o  $a_{i-1} = \bar{a}_i$ . Denotamos por  $F(S)$  al conjunto de palabras módulo esta relación y le llamamos grupo libre en  $|S|$  generadores al dotarlo de la multiplicación dada por concatenar palabras. Como es de esperarse, verificar que esta operación satisface la definición es algo tedioso pero sencillo.

Intuitivamente, el grupo libre en  $|S|$  generadores es la estructura que se obtiene al tomar todas las posibles multiplicaciones de  $|S|$  elementos y sus respectivos inversos.

El grupo libre es muy importante debido a la siguiente propiedad universal que satisface. Sea  $F(a_1, \dots, a_n)$  el grupo libre en  $n$  generadores. Entonces, para cualquier grupo  $G$  con un conjunto de generadores  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  existe un único homomorfismo suprayectivo  $f: F(a_1, \dots, a_n) \rightarrow G$  tal que  $f(a_i) = s_i$  para cada  $1 \leq i \leq n$ . En particular, gracias al primer teorema de isomorfía, existe un subgrupo normal de  $F(a_1, \dots, a_n)$ , digamos  $H$ , tal que  $F(a_1, \dots, a_n)/H \cong G$ .

Consideremos ahora un subconjunto  $R \subseteq F(a_1, \dots, a_n)$  y  $H$  el menor subgrupo normal que contiene a  $R$ . Decimos que un grupo  $G = \langle S \rangle = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$  es presentado por  $R$  si  $G \cong F(a_1, \dots, a_n)/H$ . Esto lo denotamos como  $G = \langle S \mid R \rangle$ . En vista de la propiedad universal del grupo

libre, todo grupo admite alguna presentación, pero por supuesto, esta no es única. Por ejemplo,  $\mathbb{Z}_n \cong \langle a \mid a^n \rangle = \langle a \mid a^n, a^{2n}, a^{3n} \rangle$ .

**Definición 2.5.** Sean  $G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$ ,  $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$  y  $A$  grupos. Dados homomorfismos inyectivos  $g_i : A \rightarrow G_i$  definimos el *producto amalgamado* a lo largo de  $A$  como el grupo con la presentación

$$\langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup \{g_1(a)g_2(a)^{-1} \mid a \in A\} \rangle$$

**Ejemplo 2.6.** El grupo diédrico infinito, denotado por  $D_\infty$ , es definido mediante la presentación

$$D_\infty := \langle s, t \mid t^2, s^2 \rangle,$$

que lo exhibe como producto amalgamado de dos grupos cíclicos de orden dos a lo largo del subgrupo trivial.

**Ejemplo 2.7.** El grupo  $SL_2(\mathbb{Z})$  de las matrices de orden 2 con determinante igual a 1, admite una presentación que permite exhibirlo como un producto amalgamado, a saber:

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \mid S^4, (ST)^6 \rangle$$

Los elementos  $S$  y  $T$  corresponden respectivamente a las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

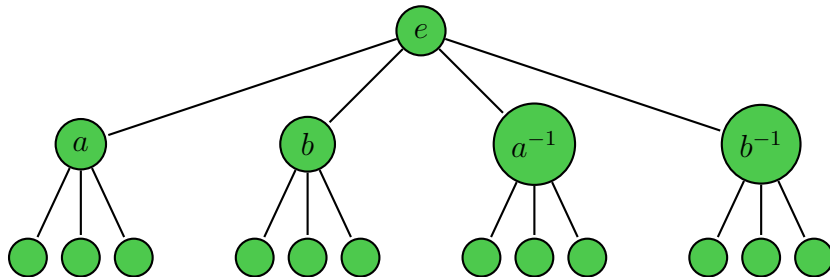
La prueba de que este par de matrices generan a todo el grupo  $SL_2(\mathbb{Z})$  es larga, así que no lo verificamos.

A un grupo dado como una amalgama de otros dos grupos a lo largo del subgrupo trivial le llamaremos *producto libre*.

**Ejemplo 2.8.** El grupo libre en dos generadores  $F(a, b)$  puede expresarse como el producto libre de dos grupos cíclicos infinitos:

$$F(a, b) = \langle a, b \rangle$$

La gráfica de Cayley de este grupo con el conjunto de generadores  $\{a, b\}$  es el árbol infinito 4-regular, es decir,  $Cay(F(a, b), \{a, b\})$  es la siguiente gráfica:



Antes de comenzar la siguiente sección, conviene repasar la métrica de la que viene dotada una gráfica conexa. Dada un gráfica conexa  $G$  (es decir, entre cualesquiera dos de sus vértices hay un camino que los une), se define la distancia entre dos vértices como la menor longitud de los caminos que los unen. Es fácil verificar que esta es una métrica bien definida.

### 3. El número de fines de un grupo

En esta sección veremos el teorema principal del texto, es decir, que todo grupo finitamente generado tiene 0, 1, 2 o una cantidad infinita de fines. Para esto, presentaremos una definición un poco restrictiva de fines de un grupo, la cual generalizaremos en las secciones posteriores. Sin embargo, para dar esta definición, debemos antes hacer ciertas observaciones.

**Observación 3.1.** Sea  $G$  un grupo finitamente generado por un conjunto  $S$ . Entonces, para cualesquiera dos vértices  $g, h$  en  $\text{Cay}(G, S)$ , hay un isomorfismo de gráficas que manda a  $g$  en  $h$ . El isomorfismo se encuentra dado por la aplicación  $a \mapsto hg^{-1}a$  para cualquier  $a \in G$ .

De forma un poco menos técnica, la observación anterior nos dice que sin importar en qué vértice de  $\text{Cay}(G, S)$  nos centremos, la gráfica se ve exactamente igual.

Dado un grupo  $G$  finitamente generado por  $S$ , denotamos por  $B(g, n)$  a la bola de radio  $n$  centrada en  $g$  en  $\text{Cay}(G, S)$  y por  $K_{g,n}$  al número de componentes conexas no acotadas (en el sentido de gráficas) en  $\text{Cay}(G, S) \setminus B(g, n)$

**Observación 3.2.** Para cualquier  $g \in G$ ,  $K_{g,n} = K_{e,n}$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . En efecto, esto es claro de la observación anterior.

**Definición 3.3.** Sea  $G$  un grupo finitamente generado. Se define el *número de fines* de  $G$  como

$$E(G) := \lim_{n \rightarrow \infty} K_{e,n}$$

Directamente de la definición y la observación anteriores tenemos que para cualquier  $g \in G$ ,  $K_{g,n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(G)$ .

Por supuesto, para que el número de fines de un grupo se encuentre bien definido, hace falta ver que este no dependa del conjunto de generadores elegido para  $G$ . En otras palabras, debemos ver que si  $G$  es un grupo finitamente generado tanto por  $S$  como  $T$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cay}(G, S) \setminus B(e, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cay}(G, T) \setminus B(e, n).$$

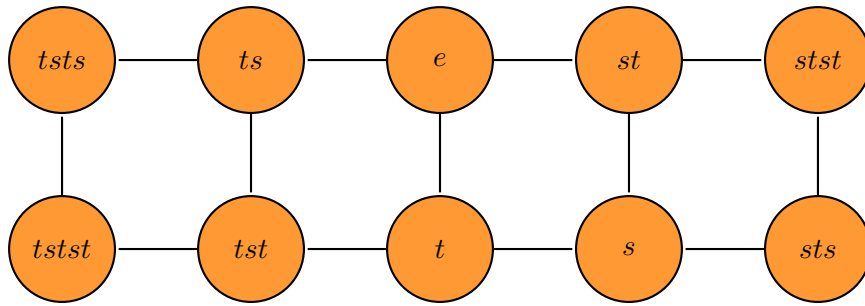
Aunque es posible dar una demostración directa de este hecho como se hace en [8], nosotros demostraremos esto de otra forma más adelante con las herramientas que nos proporcionará la teoría geométrica de grupos. Por lo pronto, supongamos que la identidad anterior es cierta.

**Ejemplo 3.4.** Un grupo finitamente generado  $G$  tiene 0 fines si, y sólo si es finito. En efecto, si un grupo es finito, entonces su gráfica de Cayley es finita y por lo tanto acotada, en particular, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $K_{e,n} = 0$  para cualquier  $n \geq N$ , lo que asegura que  $E(G) = 0$ . Por otro lado, si  $G$  es infinito, entonces para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K_{e,n} \geq 1$ , por lo que  $E(G) \geq 1$ .

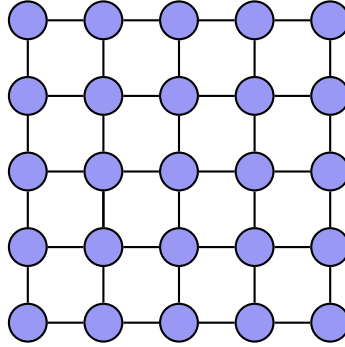
**Ejemplo 3.5.** El grupo de los enteros  $\mathbb{Z}$  tiene exactamente dos fines. Esto se sigue de que en la gráfica  $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$  presentada en el ejemplo 2.2 podemos ver que para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $K_{0,n}$  tiene exactamente dos componentes conexas.

**Ejemplo 3.6.** El grupo libre en dos generadores,  $F_2 = \langle a, b \rangle$ , tiene una infinidad de fines. En efecto,  $\text{Cay}(F_2, \{a, b\}) \setminus B(e, n)$  tiene  $4 \cdot 3^{n-1}$  componentes conexas no acotadas para  $n \geq 1$  (véase el ejemplo 2.8).

**Ejemplo 3.7.** El grupo  $D_\infty = \langle s, t \mid s^2, t^2 \rangle$  tiene dos fines. Para ver eso, presentamos la gráfica  $\text{Cay}(D_\infty, \{t, st\})$  a continuación. Podemos ver que  $D_\infty = \langle t, st \rangle$  porque  $t \in \{t, st\}$  y  $s = (st)t$ .



**Ejemplo 3.8.** El grupo  $\mathbb{Z}^2$  de las parejas ordenadas de números enteros (en donde se suma coordenada a coordenada) tiene solamente un fin. Este hecho se puede observar en la gráfica  $\text{Cay}(\mathbb{Z}^2, \{(1, 0), (0, 1)\})$ :



Ya estamos en condiciones de demostrar el resultado central del texto, el cual se conoce como el teorema de Freudenthal-Hopf.

**Teorema 3.9.** *Todo grupo finitamente generado tiene 0, 1, 2 o una cantidad infinita de fines.*

*Demostración.* Ya hemos visto ejemplos en los que grupos tiene exactamente 0, 1, 2 o una infinidad de fines. Vamos a ver que no puede haber grupos con un número finito de fines que sea mayor que 2. Supongamos que  $G$  es un grupo finitamente generado por un conjunto  $S$  que tiene  $n$  fines, donde  $n \geq 3$ . Luego, por la definición de número de fines y la observación 3.2, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que para cualquier  $k' \geq k$  y cualquier  $a \in G$ ,  $\text{Cay}(G, S) \setminus B(a, k')$  tiene  $n$  componentes conexas no acotadas. Sea  $g \in G$  tal que  $d(e, g) > 2k$  y sean  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  las componentes conexas de  $\text{Cay}(G, S) \setminus B(e, K)$ . Entonces, como  $d(e, g) > 2k$ ,  $B(g, k)$  se encuentra contenida en una componente conexa no acotada de  $\text{Cay}(G, S) \setminus B(e, k)$ , digamos  $\Gamma_1$ .

Ahora, sean  $i, j \in \{2, \dots, n\}$  distintos (que existen porque  $n \geq 3$ ). Así, tenemos que si tomamos un vértice en  $\Gamma_i$  y un vértice en  $\Gamma_j$ , entonces hay un camino que los une que está contenido en  $\Gamma_i \cup \Gamma_j \cup B(e, k)$ . Además, como  $B(g, k)$  se encuentra contenida en  $\Gamma_1$ , se sigue que  $\Gamma_i$  y  $\Gamma_j$  se encuentran contenidas en la misma componente conexa no acotada de  $\text{Cay}(G, S) \setminus B(g, k)$ . Esto nos asegura que  $B(e, k) \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n$  tiene a lo más  $n - 2$  componentes conexas no acotadas. Pero

$$\text{Cay}(G, S) \setminus B(g, k) = (\Gamma_1 \setminus B(g, k)) \cup B(e, k) \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n$$

contiene  $n$  componentes conexas no acotadas, por lo que podemos concluir que  $\Gamma_1 \setminus B(g, k)$  contiene al menos dos componentes conexas no acotadas. Esto último es una contradicción, pues asegura que  $\text{Cay}(G, S) \setminus B(e, p)$  tiene al menos  $n + 1$  componentes conexas no acotadas, para cualquier  $p > 2d(e, g)$  y esto implica que  $G$  tiene al menos  $n + 1$  fines.

Con lo anterior concluimos que si  $G$  no tiene 0, 1 o 2 fines, entonces tiene una infinidad; así que termina la prueba.  $\square$

Ya habiendo demostrado el teorema anterior, surge naturalmente la pregunta, ¿podemos dar condiciones suficientes y necesarias para que un grupo tenga cierto número de fines? Ya contestamos afirmativamente esta pregunta para el caso en que un grupo tiene 0 fines; más adelante retomaremos esto.

## 4. Geometría de gran escala

Para estudiar con aún más detalles a los fines de un grupo, presentaremos las ideas centrales de la teoría geométrica de grupos o geometría de gran escala para poder enfocar el problema desde este ángulo.

**Definición 4.1.** Sean  $(X_1, d_1)$ ,  $(X_2, d_2)$  espacios métricos y  $f : X_1 \rightarrow X_2$  una función. Diremos que  $f$  es un  $(\lambda, \epsilon)$  *embebimiento cuasi isométrico* si existen constantes  $\lambda \geq 1$  y  $\epsilon \geq 0$  tales que para cualesquiera  $x, y \in X_1$  se tiene:

$$\frac{1}{\lambda}d_1(x, y) - \epsilon \leq d_2(f(x), f(y)) \leq \lambda d_1(x, y) + \epsilon$$

**Definición 4.2.** Sea  $f : X_1 \rightarrow X_2$  un  $(\lambda, \epsilon)$  embebimiento cuasi isométrico. Diremos que  $f$  es una  $(\lambda, \epsilon)$ -*cuasi isometría* si existe una constante no negativa  $C$  con la propiedad de que para todo  $x_2 \in X_2$  existe  $x_1 \in X_1$  tal que  $d_2(f(x_1), x_2) < C$ .

**Definición 4.3.** Dos espacios métricos  $X$  e  $Y$  son *cuasi isométricos* si existe una cuasi isometría de  $X$  en  $Y$ . Si  $X$  e  $Y$  son cuasi isométricos escribiremos  $X \stackrel{CI}{\sim} Y$ .

Es posible que como primera impresión, la relación  $\stackrel{CI}{\sim}$  no parezca simétrica; para aclarar esto, la siguiente caracterización queda como ejercicio. Un  $(\lambda, \epsilon)$  embebimiento cuasi isométrico  $f : X \rightarrow Y$  es una cuasi isometría si, y sólo si existen constantes  $c_1, c_2 > 0$  y un  $(\mu, \delta)$  embebimiento cuasi isométrico  $g : Y \rightarrow X$  tales que para cualesquiera  $x \in X$  e  $y \in Y$ ,  $d_X(x, gf(x)) < c_1$  y  $d_Y(y, fg(y)) < c_2$ .

Intuitivamente, dos espacios métricos son cuasi isométricos si son los mismos a gran escala; burdamente hablando: «se ven iguales» a «lo lejos».

**Ejemplo 4.4.** Consideremos a  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{Z}$  con la métrica usual:  $d(x, y) := |x - y|$ . Veamos que  $\mathbb{R} \stackrel{CI}{\sim} \mathbb{Z}$ . Primero notemos que la inclusión  $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$  es un  $(1, 0)$  embebimiento cuasi isométrico. Más aún,  $i$  es una cuasi isometría, porque dado  $x \in \mathbb{R}$ ,  $d(x, i([x])) < 1$ , donde  $[x]$  denota la parte entera de  $x$ . Se sigue que  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{Z}$  son cuasi isométricos.



**Observación 4.5.** El ejemplo anterior muestra que en general las cuasi isometrías no tienen por qué ser inyectivas, continuas o suprayectivas.

**Observación 4.6.** La gráfica de Cayley permite entonces asociar a cada grupo finitamente generado un espacio métrico geométrico, dando lugar a una interacción entre el álgebra y la geometría. Justamente, la teoría geométrica de grupos se interesa en el estudio de los grupos salvo la relación de cuasi isometría.

En [2, p. 85] se prueba que la métrica de Cayley no depende del conjunto de generadores salvo cuasi isometría. De manera más precisa se tiene la siguiente proposición:

**Proposición 4.7.** *Si  $G$  es un grupo finitamente generado con dos conjuntos de generadores finitos  $S$  y  $S'$ , entonces  $\text{Cay}(G, S) \stackrel{CI}{\sim} \text{Cay}(G, S')$ .*

La proposición anterior nos permite definir el concepto de grupos cuasi isométricos. Decimos que dos grupos  $G$  y  $H$ , finitamente generados por  $S$  y  $T$  respectivamente, son *cuasi isométricos* si  $\text{Cay}(G, S) \stackrel{CI}{\sim} \text{Cay}(H, T)$ . Esto se denota como  $G \stackrel{CI}{\sim} H$ .

En la teoría geométrica de grupos, es de gran importancia el estudio de los subgrupos de índice finito. Esto se debe a los siguientes resultados.

**Lema 4.8.** *Sea  $G$  un grupo. Si  $H$  es un subgrupo de  $G$  de índice finito, entonces  $H$  es finitamente generado.*

**Proposición 4.9.** *Sean  $G$  un grupo finitamente generado y  $H$  un subgrupo de  $G$ .*

- (1) *Si  $H$  es de índice finito, entonces  $H \stackrel{CI}{\sim} G$ .*
- (2) *Si  $H$  es finito y normal, entonces  $G \stackrel{CI}{\sim} G/H$ .*

En [7] se ofrecen pruebas cortas de lo anterior, siendo consecuencias de lo que se conoce como el lema fundamental de la teoría geométrica de grupos o lema de Švarc-Milnor; lamentablemente, esto se encuentra fuera del alcance de este texto.

## 5. El espacio de fines de un grupo

Ahora definiremos con precisión un invariante de gran escala muy importante: el espacio de fines. Como veremos, esta es una generalización del número de fines de un grupo.

**Definición 5.1.** Sean  $(X, \tau_1)$ ,  $(Y, \tau_2)$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Se dice que  $f$  es *propia* si para cualquier subconjunto

compacto  $C$  de  $Y$ , la preimagen  $f^{-1}[C]$  es un subconjunto compacto de  $X$ .

**Ejemplo 5.2.** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función  $x \mapsto e^x$ , entonces  $f$  no es propia, ya que  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$  es compacto pero  $f^{-1}([0, 1]) = (-\infty, 0]$  no es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}$  (no es acotado).

**Ejemplo 5.3.** La siguiente observación proporciona una familia de ejemplos de funciones propias. Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua donde  $X$  es compacto y  $Y$  es un espacio de Hausdorff, entonces  $f$  es una función propia. En efecto, si  $C$  es un subconjunto compacto de  $Y$ , entonces por ser  $Y$  un espacio de Hausdorff se sigue que  $C$  es cerrado, así que por la continuidad de  $f$  se infiere que  $f^{-1}[C]$  es un subconjunto cerrado de  $X$ ; por ser  $X$  compacto, se sigue que  $f^{-1}[C]$  es compacto (todo subespacio cerrado de un compacto es compacto). En consecuencia,  $f$  es una función propia.

**Definición 5.4.** Una *componente conexa* de un espacio topológico  $X$  es un subespacio maximal y conexo de  $X$ .

**Definición 5.5.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Un *rayo* en  $X$  es una función continua  $r : [0, \infty) \rightarrow X$ . Un *rayo propio* es un rayo que además es una función propia en el sentido de la definición 5.1.

Intuitivamente, un rayo propio es un rayo que «se va al infinito».

**Definición 5.6.** Supongamos que  $r_1 : [0, \infty) \rightarrow X$ ,  $r_2 : [0, \infty) \rightarrow X$  son rayos propios. Decimos que  $r_1$  y  $r_2$  *convergen hacia el mismo fin* si para cada subconjunto compacto  $C$  de  $X$  existe un número natural  $N$  tal que  $r_1([N, \infty))$  y  $r_2([N, \infty))$  están contenidos en la misma componente conexa de  $X \setminus C$ .

**Observación 5.7.** La construcción anterior define una relación de equivalencia en el conjunto de rayos propios. La simetría es clara, para ver la reflexividad podemos argumentar como sigue. Sea  $r : [0, \infty) \rightarrow X$  un rayo propio y sea  $K$  un subconjunto compacto de  $X$ , dado que  $r$  es propia, también  $r^{-1}[K]$  es un subconjunto compacto de  $[0, \infty)$ . Se sigue que existe un número natural  $N$  tal que  $r^{-1}[K] \subseteq [0, N + 1]$ , luego  $K \cap r([N + 2, \infty)) = \emptyset$ . En consecuencia,  $r([N + 2, \infty)) \subseteq X \setminus K$ . Como  $[N + 2, \infty)$  es un subconjunto conexo y además  $r$  es continua se tiene  $r([N + 2, \infty))$  es un subconjunto conexo de  $X \setminus K$  y por lo tanto está contenida en alguna componente conexa de  $X \setminus K$ . Veamos que es transitiva: sea  $C \subseteq X$  un subconjunto compacto y sean  $N_1$  y  $N_2$  números naturales tales que  $r_1([N_1, \infty)) \subseteq L_1$ ,  $r_2([N_1, \infty)) \subseteq L_1$ ,  $r_2([N_2, \infty)) \subseteq L_2$  y  $r_3([N_2, \infty)) \subseteq L_2$  siendo  $L_1$  y  $L_2$  componentes de  $X \setminus C$ . Sin perder generalidad, supongamos que  $N_1 \leq N_2$ , entonces  $[N_2, \infty) \subseteq [N_1, \infty)$  y así  $r_2([N_2, \infty)) \subseteq r_2([N_1, \infty)) \subseteq L_1$ . Por otro

lado,  $r_2([N_2, \infty)) \subseteq L_2$ ; de donde  $r_2([N_2, \infty)) \subseteq L_1 \cap L_2$ . Como las componentes conexas son maximales,  $L_1 = L_2$ . Se sigue que el rayo  $r_1$  está relacionado con el rayo  $r_3$ .

**Definición 5.8.** Un *fin* de  $X$  es una clase de equivalencia de un rayo propio. Denotaremos por  $Ends(X)$  al conjunto de clases de equivalencia de rayos propios de  $X$ .

Si  $|Ends(X)| = m$ , donde  $m$  es un entero no negativo, entonces se dice que el espacio  $X$  tiene  $m$  fines. Además, es posible asignarle una topología adecuada al conjunto  $Ends(X)$ , de modo que se le llama el espacio de fines de  $X$  (véase [7]). Como no haremos uso de esta topología, no vamos a mencionar explícitamente cuál es.

**Ejemplo 5.9.** Si  $X$  es un espacio topológico compacto, entonces  $X$  tiene cero fines. Para ver esto, sólo hace falta notar que ningún rayo en  $X$  puede ser propio, pues si  $r: [0, \infty) \rightarrow X$  es un rayo, entonces  $r^{-1}[X] = [0, \infty)$  no es compacto.

**Ejemplo 5.10.** El conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  tiene dos fines. En efecto, sean  $r_1, r_2, r_3: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tres rayos propios. Para cualquier subconjunto compacto  $K \subseteq \mathbb{R}$ , existe  $L \in \mathbb{R}$  tal que  $K \subseteq [-L, L]$ . Como  $r_1, r_2$  y  $r_3$  son propios, existen  $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}$  tales que  $r_1^{-1}([-L, L]) \subseteq [0, N_1]$ ,  $r_2^{-1}([-L, L]) \subseteq [0, N_2]$  y  $r_3^{-1}([-L, L]) \subseteq [0, N_3]$ . Denotemos  $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ . Entonces, como  $r_1$  es una función continua,  $r_1([N+1, \infty))$  se encuentra contenido en la componente conexa  $(L, \infty)$  o en la componente  $(-\infty, L)$ ; podemos decir lo mismo de  $r_2$  y de  $r_3$ . En particular, al menos dos rayos deben converger hacia el mismo fin. Con esto obtenemos que  $\mathbb{R}$  tiene dos fines.

**Ejemplo 5.11.** Si  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ , entonces  $\mathbb{R}^n$  tiene un solo fin. Para ver esto, se debe usar un argumento muy similar al del ejemplo anterior, notando que para cualquier compacto  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ , existe  $L \in \mathbb{R}$  tal que  $K \subseteq \overline{B}(0, L)$  (el disco cerrado centrado en 0 con radio  $L$ ) y que  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0, L)$  tiene exactamente una componente conexa.

**Ejemplo 5.12.** El subespacio de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ , tiene cuatro fines. De nuevo, para ver esto hay que usar un argumento muy similar al de los ejemplos anteriores. Simplemente hay que notar que todo subconjunto compacto se encuentra contenido en uno de la forma  $([-L, L] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-L, L])$  para algún  $L \in \mathbb{R}$ , y que al tomar el espacio menos un subconjunto de esta forma obtenemos exactamente cuatro componentes conexas.

Definir el espacio de fines de un grupo  $G$  que es finitamente generado requiere de más atención, puesto que  $G$  es un espacio discreto con la métrica de la palabra. Para poder establecer esta definición, debemos

hablar de espacios geodésicos y cuasi geodésicos, y de la realización geométrica de una gráfica.

**Definición 5.13.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Una *geodésica* de longitud  $L > 0$  es un encaje isométrico  $c : [0, L] \rightarrow X$ . A  $c(0)$  se le llama el punto inicial de  $c$  y a  $c(L)$  el punto final de  $c$ .

**Definición 5.14.** Un espacio métrico  $(X, d)$  es *geodésico* si cualesquiera dos puntos se pueden conectar mediante una geodésica. Más precisamente: si dados  $x, y \in X$  existe una geodésica cuyo punto inicial es  $x$  y cuyo punto final es  $y$ .

**Ejemplo 5.15.** En el espacio Euclideano las geodésicas son las líneas rectas, así que  $\mathbb{R}^2$  es geodésico. Sin embargo, el plano agujereado  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  no lo es. Para ver esto, podemos considerar cualesquiera dos puntos simétricos respecto al origen. Por ejemplo, la distancia entre los puntos  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$  es 2, y la única curva en  $\mathbb{R}^2$  que los une, cuya longitud es 2 es la línea recta que une a ambos puntos. Sin embargo, esta línea recta no se encuentra contenida en el plano agujereado.

**Ejemplo 5.16.** El plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  es un espacio métrico geodésico. Este es un resultado clásico de la geometría hiperbólica.

**Definición 5.17.** Un *rayo cuasi geodésico* en un espacio métrico  $X$  es un  $(\lambda, \epsilon)$  embebimiento cuasi isométrico  $c : [0, \infty) \rightarrow X$ .

**Ejemplo 5.18.** La función  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada en coordenadas rectangulares  $t \mapsto (t, \ln(1+t))$  es un rayo cuasi geodésico. Veamos que  $f$  es un  $(2, 0)$  embebimiento cuasi isométrico. Sean  $t, t' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Probemos primero que  $\frac{1}{2}|t - t'| \leq d_{\mathbb{R}^2}(f(t), f(t'))$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|t - t'| &= \frac{1}{2}\sqrt{(t - t')^2} \\ &\leq \frac{1}{2}\sqrt{(t - t')^2 + [\ln(1+t) - \ln(1+t')]^2} \\ &= \frac{1}{2}d_{\mathbb{R}^2}(f(t), f(t')) \\ &\leq d_{\mathbb{R}^2}(f(t), f(t')) \end{aligned}$$

Probemos ahora que  $d_{\mathbb{R}^2}(f(t), f(t')) \leq 2|t - t'|$ . Sin perder generalidad supongamos que  $t > t'$  (si  $t = t'$  la desigualdad es evidente). Sea  $g(x) = \ln(1+x)$ , entonces, por el teorema del valor medio, existe  $c \in (t', t)$  tal que  $g'(c) = \frac{g(t) - g(t')}{t - t'}$ . Se sigue que  $|\ln(1+t) - \ln(1+t')| \leq \frac{|t - t'|}{1+c}$ . Dado que  $c > 0$ ,  $\frac{1}{1+c} < 1$ . Por lo tanto  $|\ln(1+t) - \ln(1+t')| \leq |t - t'|$ . Sumando el término  $|t - t'|$  en ambos lados de la última desigualdad se concluye que  $|t - t'| + |\ln(1+t) - \ln(1+t')| \leq 2|t - t'|$ . Como  $d_{\mathbb{R}^2}(f(t), f(t')) = \sqrt{(t - t')^2 + [\ln(1+t) - \ln(1+t')]^2} \leq |t - t'| + |\ln(1+t) - \ln(1+t')|$ ,

se tiene que  $d_{\mathbb{R}^2}(f(t), f(t')) \leq 2|t - t'|$ . Concluimos que  $f$  es un rayo cuasi geodésico.

**Definición 5.19.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sean  $\lambda, \epsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Una  $(\lambda, \epsilon)$ -cuasi geodésica en  $X$  es un  $(\lambda, \epsilon)$  embebimiento cuasi isométrico  $\phi : [t, t'] \rightarrow X$  donde  $[t, t'] \subseteq \mathbb{R}$  es un intervalo cerrado. Diremos que un espacio  $X$  es cuasi geodésico si cualesquiera dos puntos se pueden conectar mediante una cuasi geodésica.

**Observación 5.20.** Notemos que todo espacio geodésico es  $(1, 0)$ -cuasi geodésico. También se tiene que si  $G$  es un grupo finitamente generado por un conjunto  $S$ , entonces  $G$  (con la métrica de la palabra) es un espacio  $(1, 1)$ -cuasi geodésico. La primera afirmación es clara, porque toda isometría es una  $(1, 0)$ -cuasi isometría. Para ver la segunda afirmación, consideremos dos vértices,  $u, v$  en  $\text{Cay}(G, S)$  y una trayectoria de longitud mínima que los conecte, digamos  $(u = v_0, v_1 \dots, v_n = v)$ . Entonces, es claro que la función  $f : [0, n] \rightarrow G$  definida por  $f(x) = v_{[x]}$  es una  $(1, 1)$ -cuasi geodésica, donde  $[x]$  denota la parte entera de  $x$ .

Ahora definiremos la realización geométrica de una gráfica  $\Gamma = (V, E)$ . La construcción formal de esto es complicada, pero la idea es en realidad muy sencilla. Intuitivamente, se sustituyen las aristas de  $\Gamma$  por copias del intervalo  $[0, 1]$  y se identifican los extremos de los intervalos si inciden en el mismo vértice. Más formalmente, la realización geométrica de  $\Gamma$ ,  $\bar{\Gamma}$ , es el cociente de  $E \times [0, 1]$  que se obtiene al identificar  $(e, i)$  con  $(f, j)$  si  $e$  y  $f$  inciden en el mismo vértice e  $i$  y  $j$  representan este vértice (donde  $e, f \in E$  e  $i, j \in \{0, 1\}$ ). Dada una arista  $e$ , una forma de asignarle vértices a  $(e, 0)$  y  $(e, 1)$  es mediante un buen orden en el conjunto de vértices y fijando 0 como el menor y 1 como el mayor. Por supuesto,  $\bar{\Gamma}$  viene equipado con la métrica natural y la inclusión  $\iota : \Gamma \rightarrow \bar{\Gamma}$ .

**Ejemplo 5.21.** La realización geométrica de  $\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$  es  $\mathbb{R}$  con la métrica usual; véase el ejemplo 2.2.

**Ejemplo 5.22.** La realización geométrica de  $\mathbb{Z}^n$  para  $n \geq 2$  es el subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  que consta de las  $n$ -adas tales que al menos  $n - 1$  entradas son números enteros, aunque la métrica es distinta. En el ejemplo 3.8 se puede ver esto claramente para el caso en que  $n = 2$ .

**Observación 5.23.** Si  $G$  es un grupo finitamente generado por un conjunto  $S$ , entonces  $\overline{\text{Cay}(G, S)}$  es un espacio geodésico y la inclusión  $\iota : \text{Cay}(G, S) \rightarrow \overline{\text{Cay}(G, S)}$  es una cuasi isometría.

Ya podemos definir el espacio de fines de un grupo  $G$  que es finitamente generado por un conjunto  $S$  como el espacio de fines de  $\overline{\text{Cay}(G, S)}$ ;

sin embargo, para tener un teoría aún más rica, hace falta hacer ciertas aclaraciones.

Dado un espacio métrico cuasi geodésico  $(X, d)$ , se pueden usar rayos cuasi geodésicos y hacer una construcción análoga a la de los rayos propios para definir el espacio de fines de  $X$  en estos términos. Resulta que en el caso de espacios geodésicos, este espacio coincide con  $Ends(X)$ .

El siguiente resultado muestra que el espacio de fines es un invariante cuasi isométrico o invariante de gran escala:

**Proposición 5.24.** *Si  $X$  e  $Y$  son espacios métricos cuasi geodésicos tales que  $X \stackrel{CI}{\sim} Y$ , entonces  $Ends(X)$  es homeomorfo a  $Ends(Y)$ .*

El lector puede consultar la demostración de este hecho en [3, prop. 8.29]. Por consiguiente, podemos definir el espacio de fines de un grupo finitamente generado. Veremos un poco más adelante que la cardinalidad de este espacio coincide con el número de fines de un grupo que definimos al inicio, por lo que usaremos la nomenclatura *tiene  $n$  fines* sin preocupaciones.

**Definición 5.25.** Sea  $G$  un grupo y sea  $Cay(G, S)$  su gráfica de Cayley con respecto a un conjunto finito de generadores  $S$ . Definimos  $Ends(G) := Ends(Cay(G, S))$ . Nótese que en vista de las proposiciones 4.7 y 5.24, esta definición no depende del conjunto de generadores  $S$ .

**Ejemplo 5.26.** Por el ejemplo 4.4,  $\mathbb{Z} \stackrel{CI}{\sim} \mathbb{R}$ , luego  $Ends(\mathbb{Z})$  es homeomorfo a  $Ends(\mathbb{R})$ . Usando el resultado del ejemplo 5.10 se deduce que  $|Ends(\mathbb{R})| = 2$  y por lo tanto  $\mathbb{Z}$  tiene dos fines.

**Ejemplo 5.27.** Notar que  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Z}$  no son cuasi isométricos ya que  $\mathbb{N}$  tiene un solo fin (por ser cuasi isométrico a  $[0, \infty)$ ) mientras que  $\mathbb{Z}$  tiene dos fines. Intuitivamente esto era de esperarse ya que ambos conjuntos vistos a «*lo lejos*» son distintos.

**Ejemplo 5.28.** En general, si  $n \geq 1$ , entonces  $\mathbb{Z}^n \stackrel{CI}{\sim} \mathbb{R}^n$ , pues la inclusión es una cuasi isometría. De aquí se deduce, por ejemplo, que  $\mathbb{Z}^2$  solo tiene un fin. También se tiene que los grupos  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z}^n$  no son cuasi isométricos si  $n \geq 2$ .

Además, como consecuencia de las proposiciones 4.9 y 5.24, tenemos la siguiente.

**Proposición 5.29.** *Sean  $G$  un grupo finitamente generado y  $H$  un subgrupo de  $G$ .*

- (1) *Si  $H$  es de índice finito, entonces  $H$  tiene el mismo número de fines que  $G$ .*
- (2) *Si  $H$  es normal y finito, entonces  $G$  y  $G/H$  tienen el mismo número de fines.*

Finalmente, para enlazar las dos definiciones de fines un grupo, tenemos la siguiente proposición. Una consecuencia de esta es que  $E(G)$  no depende del conjunto de generadores elegido para  $G$ .

**Proposición 5.30.** *Sea  $G$  un grupo finitamente generado. Entonces,  $|Ends(G)| = E(G)$ .*

*Demostración.* Sea  $S$  un conjunto finito de generadores para  $G$ . Notemos que dada una gráfica  $\Gamma$ , una subgráfica de  $\Gamma$  es una componente conexa (en el sentido de gráficas) si, y sólo si su realización geométrica es una componente conexa (en el sentido topológico) de  $\bar{\Gamma}$ . Por lo tanto, para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , si  $\bar{K}_n$  es el número de componentes conexas no acotadas de  $\overline{Cay(G, S)} \setminus B(e, n)$ , entonces

$$E(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_{e,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{K}_n.$$

Pero por el mismo argumento que el que usamos en los ejemplos 5.10, 5.11, y 5.12, tenemos que

$$|Ends(G)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{K}_n = E(G). \quad \square$$

Como dijimos antes, sería interesante poder dar condiciones suficientes y necesarias que aseguren que un grupo tiene cierto número de fines. Ya en el ejemplo 3.4 analizamos el caso en el que un grupo tiene 0 fines. El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de la proposición 5.29 y del ejemplo 3.5, mientras que el teorema que viene a continuación resuelve, en buena parte, la pregunta que planteamos.

**Corolario 5.31.** *Si  $G$  tiene un subgrupo cíclico infinito de índice finito, entonces  $G$  tiene dos fines.*

**Teorema 5.32.** *Sea  $G$  un grupo finitamente generado.*

- (1)  *$G$  tiene no tiene fines si, y sólo si  $G$  es finito.*
- (2)  *$G$  tiene dos fines si, y sólo si tiene un subgrupo cíclico infinito de orden finito.*
- (3)  *$G$  tiene más de un fin si, y sólo si es un producto amalgamado (no trivial) a través de un grupo finito o es una extensión HNN (no trivial) sobre un grupo finito.*
- (4) *Si  $G$  es un grupo libre de torsión, entonces  $G$  tiene una infinidad de fines si, y sólo si es un producto libre de dos grupos no triviales.*

La prueba del teorema anterior se encuentra muy lejos del alcance de estas notas, aun así, conviene entrar un poco en detalles. Por supuesto, no hay nada que decir del primer enunciado. El segundo enunciado se encuentra demostrado de forma directa en [8]; cabe destacar que es posible definir el número de fines de un espacio métrico de forma puramente algebraica, en estos términos, la prueba del resultado junto con el teorema 1.1 también se puede ver en [2].

El tercer enunciado es conocido como el teorema de descomposición de Stallng; este teorema, como muchos otros en la teoría geométrica de grupos, nos dice la estrecha relación entre la estructura geométrica y la estructura algebraica de los grupos. Se puede consultar la definición de extensión HNN en [7]. Finalmente, el cuarto enunciado es una consecuencia del anterior; recordemos que un grupo es libre de torsión cuando todos sus elementos, excepto la identidad, son de orden infinito.

**Ejemplo 5.33.** En vista del ejemplo 2.7 y el enunciado (3) del teorema anterior, el grupo  $SL_2(\mathbb{Z})$  tiene más de un fin. Por otro lado, este grupo es cuasi isométrico a

$$PSL_2(\mathbb{Z}) = \frac{SL_2(\mathbb{Z})}{\{I, -I\}} = \langle S, T \mid S^2, (ST)^3 \rangle$$

en vista de la proposición 4.9. Usando argumentos de geometría hiperbólica plana, uno puede verificar que  $PSL_2(\mathbb{Z})$  no tiene subgrupos cíclicos infinitos de índice finito y por ende tiene una infinidad de fines. También es fácil convencerse de esto dibujando la gráfica  $Cay(PSL_2(\mathbb{Z}), \{S, ST\})$ .

**Ejemplo 5.34.** Sea  $\Gamma = (V, E)$  una gráfica finita, definimos su grupo de Artin asociado como

$$A(\Gamma) = \langle v \in V \mid [u, v] = e \text{ si } \{u, v\} \in E \rangle$$

donde  $[u, v]$  es el conmutador de  $u$  y  $v$ . Por supuesto, si  $|V| = 1$ , entonces  $A(\Gamma) \cong \mathbb{Z}$  y por lo tanto tiene dos fines. Por otro lado, si  $|V| > 1$  y  $\Gamma$  es un gráfica conexa, notemos que  $A(\Gamma)$  tiene exactamente un fin, pues para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Cay(A(\Gamma), V) \setminus B(e, n)$  es una gráfica conexa. Finalmente, si  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , donde  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son dos componentes desconectadas, entonces  $A(\Gamma)$  es isomorfo al producto libre de  $A(\Gamma_1)$  con  $A(\Gamma_2)$ . Por lo tanto, como  $A(\Gamma)$  es un grupo libre de torsión, si  $\Gamma$  es desconexa, entonces  $A(\Gamma)$  tiene una infinidad de fines.

En resumen, hemos presentado una introducción a la teoría geométrica de grupos enfocándonos en el estudio del espacio de fines. Otros temas clásicos son el crecimiento de grupos, el estudio de grupos a través de acciones (como en el lema de Švarc-Milnor) y el estudio de los grupos hiperbólicos. Buenos puntos de partida para esto son [7] y [8].

A pesar de todo, resulta que el espacio de fines es un invariante cuasi isométrico que puede refinarse aún más al concepto de frontera. El estudio de las fronteras de un grupo ha resultado en muchos trabajos recientes, en su mayoría enfocados al estudio de fronteras de grupos hiperbólicos (véase [6]).



## Bibliografía

- [1] M. Bridson y A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, 1.<sup>a</sup> ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
- [2] D. Cohen, *Groups of Cohomological Dimension One*, Springer, 1972.
- [3] P. de La Harpe, *Topics in Geometric Group Theory*, University of Chicago Press, 2000.
- [4] M. Fort y D. Silver, *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 2010.
- [5] E. Ghys, A. Haefliger y A. Verjovsky, *Group Theory from a Geometrical Viewpoint*, World Publishing Company, 1991.
- [6] I. Kapovich y N. Benakli, «Boundaries of hyperbolic groups», en *Combinatorial and Geometric Group Theory*, ed. R. Gilman, American Mathematical Society, 2002.
- [7] C. Löh, «Geometric group theory, an introduction», [http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/ggt\\_ws1011/lecture\\_notes.pdf](http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/ggt_ws1011/lecture_notes.pdf), July 2011.
- [8] J. Meier, *Groups, Graphs and Trees: An Introduction to the Geometry of Infinite Groups*, 1.<sup>a</sup> ed., Cambridge University Press, 2008.