

# Poincaré y el problema de $n$ -cuerpos

Gil Bor

CIMAT, A.P. 402,  
Guanajuato 36000, Gto., Mexico.  
gil@cimat.mx

Richard Montgomery

Dept. of Mathematics,  
University of California, Santa Cruz,  
Santa Cruz CA 95064  
rmont@count.ucsc.edu

## Resumen

Discutimos 4 ideas que surgen del trabajo de Poincaré, las cuales convergen en la solución de un caso particular del problema de los  $n$ -cuerpos.

## 1. Introducción

El problema de los  $n$ -cuerpos es un modelo matemático sugerido por Isaac Newton en su libro *Principios matemáticos de la filosofía natural* (1687) para modelar el comportamiento de nuestro sistema planetario solar. El modelo consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, fáciles de plantear pero difíciles de resolver y analizar. Su estudio ha ocupado los mejores matemáticos y físicos en los últimos 350 años (la distinción entre las dos ramas es relativamente reciente). El tema sigue siendo un tema de investigación muy activo hoy en día, sirviendo como un «punto de encuentro» entre varias disciplinas, como sistemas dinámicos y teoría ergódica, geometría (riemanniana, simpléctica y compleja), topología, cálculo de variaciones y teoría de Morse, análisis numérico y ciencias de computación.

H. Poincaré ha dedicado una parte considerable de su trabajo al estudio de varios aspectos del problema, culminando en los 3 volúmenes

de su obra maestra *Nuevos métodos de la mecánica celeste* (1892-99) y la obra *Lecciones de la mecánica celeste* (1905-10).

En este artículo queremos discutir 4 ideas que surgen del trabajo de Poincaré, las cuales convergen en la solución de un caso particular del problema de los  $n$ -cuerpos:

1. Órbitas periódicas: son densas en el espacio de todas las órbitas.
2. Métodos variacionales: son efectivos para encontrar órbitas periódicas.
3. Geometría hiperbólica: el disco de Poincaré como un modelo muy útil para estudiar la geometría hiperbólica de Bolyai-Lobachevsky.
4. Teoría de bifurcación: al variar continuamente los parámetros de un sistema, las soluciones varían típicamente continuamente con los parámetros, pero cuando los parámetros cruzan ciertos valores «críticos» (ciertas derivadas se anulan), nuevas soluciones surgen, o viejas soluciones «chocan» o desaparecen. . .

El problema particular que describimos en este artículo es el problema de *tres* cuerpos en el *plano*, con *masas iguales*, potencial tipo  $1/r^2$  (la fuerza entre cada par de cuerpos es inversamente proporcional al cubo de la distancia) y energía y momento angular nulos. Este caso fue tratado por uno de nosotros en un artículo previo [12]. Esperamos que el problema particular ayude a comprender, o por lo menos apreciar, la profundidad del problema «verdadero» de los  $n$ -cuerpos, con el potencial tipo  $1/r$  (fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia), en espacio 3-dimensional.

Lo que hace el problema con potencial  $1/r^2$  especial es la existencia de una simetría adicional, una *simetría de escalamiento*, la cual simplifica el problema y nos permite llegar a responder unas preguntas básicas usando las ideas de Poincaré, así indicando el camino para la resolución de estas preguntas en el caso de potencial tipo  $1/r$ , que son abiertas todavía.

## 2. Las ecuaciones de Newton y sus leyes de conservación

### 2.1. Las ecuaciones de Newton

Consideramos a  $n$  cuerpos en  $\mathbb{R}^d$  con posiciones  $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{R}^d$  y masas  $m_1, m_2, \dots, m_n > 0$ . El movimiento de los cuerpos bajo la

influencia de una fuerza atractiva con potencial tipo  $1/r^\alpha$  está modelado por el sistema

$$m_i \ddot{q}_i = \sum_{j \neq i} F_{ji}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

donde

$$F_{ij} = m_i m_j \frac{q_i - q_j}{r_{ij}^{\alpha+2}}, \quad r_{ij} = \|q_i - q_j\|.$$

Tenemos entonces un sistema de EDO (ecuaciones diferenciales ordinarias) de segundo orden en  $\mathbb{R}^{dn} = \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d$  ( $n$  veces), fuera del conjunto de «colisiones»  $\bigcup_{i \neq j} \{q_i = q_j\}$ . El sistema depende de los  $n + 1$  parámetros  $\alpha, m_1, m_2, \dots, m_n$ , aunque en realidad son solamente  $n$  parámetros, ya que re-escalando el tiempo  $t \mapsto ct$ , obtenemos las mismas ecuaciones pero con masas re-escaladas por  $m_i \mapsto c^2 m_i$ .

El caso «verdadero», propuesto por Newton, corresponde a  $\alpha = 1$ ,  $d = 3$ . El caso principal que consideramos en este artículo, por razones que explicaremos más adelante, es de  $n = 3$ ,  $d = 2$ ,  $\alpha = 2$  y  $m_1 = m_2 = m_3$ .

## 2.2. Leyes de conservación

Usaremos las masas para definir el siguiente producto escalar en  $\mathbb{R}^{dn}$ :

$$\langle v, w \rangle = \sum_i m_i \langle v_i, w_i \rangle,$$

donde  $v = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $w = (w_1, \dots, w_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$ , y usamos a la derecha el producto escalar estándar en  $\mathbb{R}^d$ .

Luego, denotamos por

$$\begin{aligned} \dot{q} &= (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n), \\ K &= \frac{1}{2} \langle \dot{q}, \dot{q} \rangle = \frac{1}{2} \sum_i m_i \|\dot{q}_i\|^2, \\ U &= \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^\alpha}, \\ H &= K(\dot{q}) - U(q), \\ I &= \langle q, q \rangle. \end{aligned}$$

La terminología asociada es la siguiente:  $K$  es la *energía cinética*,  $-U$  es la *energía potencial*,  $H$  es la *energía total* (o el «hamiltoniano») y  $I$  es el *momento de inercia*.

Con esta notación, el sistema de ecuaciones de Newton (1) se puede re-escribir como

$$\ddot{q} = \nabla U \quad (2)$$

(recuerda que la gradiente de una función está definida con respecto al producto escalar por  $dU(v) = \langle \nabla U, v \rangle$ , para todo  $v \in \mathbb{R}^{nd}$ . Así que, en coordenadas, si  $q_i = (x_{i1}, \dots, x_{id})$  entonces  $\nabla U := (\nabla_1 U, \dots, \nabla_n U)$ , donde  $\nabla_i U = \frac{1}{m_i} (\frac{\partial U}{\partial x_{i1}}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_{id}})$ ,  $i = 1, \dots, n$ .)

Una consecuencia inmediata de la última ecuación (2) y la definición de  $H$ , usando la regla de la cadena, es la *Ley de Conservación de Energía*:

$$H \text{ es constante a lo largo de cada solución.} \quad (3)$$

Otro resultado básico, también una consecuencia elemental de las ecuaciones de Newton y la homogeneidad de  $U$ , es la *identidad de Lagrange-Jacobi*:

$$\ddot{I} = 4H + (4 - 2\alpha)U \quad \text{a lo largo de cada solución.} \quad (4)$$

Así que el único caso en donde  $\ddot{I}$  es constante es cuando  $\alpha = 2$ . Como  $I = \|q\|^2$  mide el «tamaño» total del sistema, decimos que una solución  $q(t)$  de las ecuaciones de Newton es *acotada* si  $I$  está acotado. Tenemos entonces, por la identidad de Lagrange-Jacobi (4), la siguiente proposición.

**Proposición 1.** *Consideramos a una solución acotada de las ecuaciones de Newton (1), definida en un intervalo infinito de tiempo. Entonces*

1. *si  $\alpha = 2$  entonces  $H = 0$ ,*
2. *si  $\alpha < 2$  entonces  $H < 0$ ,*
3. *si  $\alpha > 2$  entonces  $H > 0$ .*

*Esto es, para  $H > 0$  y  $\alpha \leq 2$ , no existen soluciones acotadas definidas en un intervalo infinito de tiempo. Para  $H < 0$  y  $\alpha \geq 2$ , no existen soluciones definidas en un intervalo infinito de tiempo porque todas terminan en una colisión total ( $I = 0$ ).*

De aquí empezamos entender lo que tiene de especial el caso de  $\alpha = 2$ .

Más allá que la energía, las otras leyes de conservación para el sistema de  $n$  cuerpos, independiente del valor de la  $\alpha$ , son la *Ley de conservación del momento lineal total*,

$$P := \sum_{i=1}^n m_i \dot{q}_i = \text{const.} \in \mathbb{R}^d, \quad (5)$$

y la *Ley de conservación del momento angular total*,

$$J := \sum_{i=1}^n m_i q_i \wedge \dot{q} = \text{const.} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^d). \quad (6)$$

Así que la ley de conservación del momento lineal total consiste en realidad en la conservación de  $d$  funciones escalares y la ley de conservación del momento angular total consiste en la conservación de  $d(d-1)/2$  funciones escalares.

Ambas leyes de conservación se pueden verificar fácilmente directamente con las ecuaciones de Newton. Más conceptualmente, estas leyes de conservación son una consecuencia de la estructura hamiltoniana de las ecuaciones de Newton y la invariancia del hamiltoniano  $H$  bajo traslaciones y rotaciones. Para más detalles sobre los aspectos generales de ecuaciones hamiltonianas se puede consultar libros de texto estándar como [9] o [1].

### 3. El caso de dos cuerpos

Antes de proceder con nuestro caso de  $n = 3$ ,  $d = 2$ ,  $\alpha = 2$ , queremos ilustrar algunas de las ideas y conceptos básicos en el caso de 2 cuerpos ( $n = 2$ ,  $d$  y  $\alpha$  arbitrarios). Este es el único caso en donde podemos resolver y entender las ecuaciones completamente y las soluciones de este caso nos sirven también para el caso de  $n > 2$ . Lo que sucede para  $n = 2$  es que las leyes de conservación (energía, momentos lineal y angular total) son suficientes para integrar las ecuaciones de Newton.

Primero, para aprovechar de la conservación del momento lineal total, definimos el *centro de masa* por

$$q_{CM} = \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{m}, \quad m = m_1 + m_2.$$

Así que  $\dot{q}_{CM} = P/m$  es constante, por lo que el centro de masa de nuestro sistema de dos masas se mueve a lo largo de una recta en  $\mathbb{R}^d$  con velocidad constante.

Luego, definimos a las *posiciones relativo al centro de masa* por

$$Q_i := q_i - q_{CM}, \quad i = 1, 2.$$

Tenemos entonces que las  $Q_i$  satisfacen las mismas ecuaciones que las  $q_i$  pero además  $Q_{CM} = m_1 Q_1 + m_2 Q_2 = 0$ , por lo que el movimiento de una de las masas determina el movimiento de la otra.

Definimos digamos  $Q := Q_1$  y obtenemos la EDO

$$\ddot{Q} = -Q/r^{\alpha+2}, \quad r = \|Q\|, \quad Q(t) \in \mathbb{R}^d.$$

Nota: la ecuación en realidad involucra una constante,  $\ddot{Q} = -cQ/r^{\alpha+2}$ , con  $c > 0$ ; pero, como hemos explicado arriba, re-escalando el tiempo, podemos reducir al caso  $c = 1$ .

Luego, la conservación de momento angular de esta ecuación,  $J = Q \wedge \dot{Q}$ , implica que el movimiento de  $Q$  se queda de hecho restringido a un plano, el plano generado por  $Q(0), \dot{Q}(0)$  (o una recta, si son linealmente dependientes), en donde el área  $\|J\|$  del paralelogramo generado por  $Q, \dot{Q}$  es constante.

Podemos suponer entonces, sin pérdida de generalidad, que  $Q \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ . Al escribir la ecuación  $\ddot{Q} = -Q/r^{\alpha+2}$  en coordenadas polares,  $Q = re^{i\theta}$ , obtenemos, después de cierta manipulación, la ecuación

$$\ddot{r} = \frac{\ell^2}{r^3} - \frac{1}{r^{\alpha+1}},$$

donde  $\ell = r^2\dot{\theta}$  es el valor (constante) del momento angular.

Analizando esta ecuación (de hecho, esta es también una ecuación tipo Newton,  $\ddot{r} = -\frac{dV}{dr}$ , con  $V = \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{1}{\alpha r^\alpha}$ , por lo que  $\dot{r}^2/2 + V = H = \text{const.}$ ), obtenemos

**Proposición 2.** ■ *Para  $\ell = 0$  (todo  $\alpha$ ): toda solución empieza y termina en colisión. Tal solución es acotado si y solo si  $H < 0$ .*

■ *Para  $\ell \neq 0, \alpha < 2$ :*

- *$H < 0$ : toda solución es acotada y separada de colisión; esto es, existen constantes positivas  $c, C$  tal que  $c < r(t) < C$  para todo  $t$ .*
- *$H \geq 0$ : toda solución es no acotada y separada de colisión.*

■ *Para  $\ell \neq 0, \alpha > 2$ :*

- *$H < 0$ : toda las solución es acotada, empieza y termina en colisión.  
Sea  $H_* > 0$  el único valor crítico de  $V$ .*
- *$0 < H < H_*$ : las soluciones se separan en dos familias; una familia acotada de soluciones que empiezan y terminan en colisión, y otra familia de soluciones no acotadas, todas separadas de colisión.*

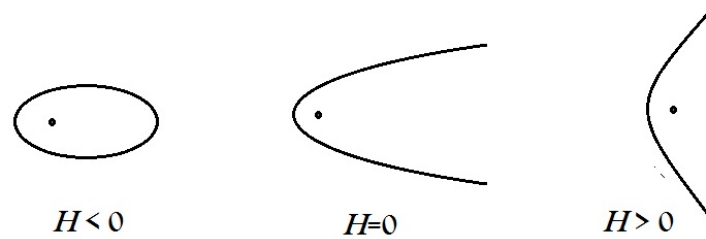


Figura 1: Las órbitas de Kepler ( $\alpha = 1$ ).

- $H > H_*$ : toda solución es no acotada, empieza o termina en colisión.
- $\ell \neq 0, \alpha = 2$ : en este caso  $V = (\ell^2 - 1)/2r^2$ .
  - $H < 0$ :  $|\ell| < 1$ , toda solución es acotada y termina en colisión.
  - $H = 0$ :  $|\ell| = 1$ ,  $\ddot{r} = 0$  y toda solución con  $\dot{r}(0) = 0$  es un círculo.
  - $H > 0$ :  $\ell > 1$ , toda solución es no acotada y separada de colisión.
- Para cada  $\ell \neq 0, \alpha \neq 2$ , existe una órbita circular única cuyo radio es el único punto crítico de  $V$ .
- Para  $\ell \neq 0, \alpha = 1$ , todas las órbitas son secciones cónicas («órbitas de Kepler»): elipses ( $H < 0$ ), parábolas ( $H = 0$ ) e hipérbolas ( $H > 0$ ). De hecho,  $\alpha = 1$  es el único  $\alpha$  para el cual todas las órbitas acotadas son cerradas (órbitas periódicas).

La demostración de esta proposición es elemental. El lector puede encontrar las soluciones dibujando el «potencial efectivo»  $V$  para varios valores de  $\alpha, \ell$  y aplicando métodos estándar de mecánica clásica de nivel licenciatura para sistema de un grado de libertad. Ver por ejemplo el texto [9].

## 4. El espacio de forma para 3 cuerpos en el plano

Empezamos ahora investigar el caso que nos interesa en este artículo, que es de alguna manera el primer caso interesante no trivial después

de  $n = 2$ , el caso de 3 cuerpos en el plano ( $d = 2$ ,  $n = 3$ ). Identificamos el plano  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  de la manera usual,  $(a, b) \mapsto a + ib$ , así que una configuración de los 3 cuerpos determina un punto  $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{C}^3$ . Por la simetrías de traslación y rotación del problema esperamos reducir las ecuaciones de Newton a un sistema de ecuaciones sobre el espacio de *clases de congruencias de triángulos orientados en el plano* (posiblemente degenerados). Describimos aquí primero geoméricamente este espacio.

Como hemos notado en la sección anterior, podemos reducir por traslaciones al definir el cambio de variable  $Q_i = q_i - q_{CM}$ , donde  $q_{CM} = \sum_i m_i q_i / \sum_i m_i$ .

Luego, las rotaciones de triángulos están dadas por

$$Q = (Q_1, Q_2, Q_3) \mapsto \lambda Q = (\lambda Q_1, \lambda Q_2, \lambda Q_3), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| = 1.$$

El espacio de clases de congruencias de triángulos orientados es entonces  $\mathbb{C}^2/S^1 \cong C(S^2) \cong \mathbb{R}^3$  (un cono sobre  $S^2$ ). Esta es de hecho una «conificación» de la fibración de Hopf,  $S^3 \rightarrow S^2$ . Una fórmula explícita que realiza este cociente, usando cuaterniones, es

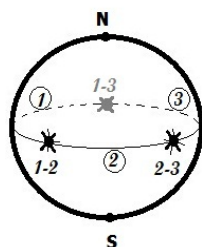
$$\mathbb{H} \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{H}), \quad h \mapsto hi\bar{h}$$

Con esta realización, la esfera unitaria  $S^2 \subset \mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{S}(\mathbb{H})$  representa las clases de congruencia de triángulos orientados de escala fija (por ejemplo, de perímetro=1) y la dirección radial en  $\mathbb{R}^3$  representa la variación de escala. Los triángulos degenerados (colineales) están representados en  $S^2$  por el ecuador y las colisiones binarias por 3 puntos equidistantes sobre el ecuador, dividiéndolo en 3 arcos que corresponden a los 3 tipos distintos de colisiones binarias (etiquetadas por la masa en medio). El origen de  $\mathbb{R}^3$  representa a las colisiones triples y los polos norte/sur representan triángulos equiláteros (con dos orientaciones posibles). El ecuador divide a la esfera en las dos clases de orientación de triángulos.

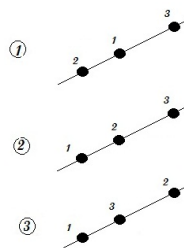
## 5. Reducción de las ecuaciones de Newton al espacio de forma

Nuestra meta ahora es reducir las ecuaciones de Newton al espacio de forma  $\mathbb{R}^3$  (clases de congruencia de triángulos orientados en el plano). Un resultado estándar en mecánica hamiltoniana es que cuando un sistema es invariante bajo la acción de un grupo (el grupo euclidiano de  $\mathbb{R}^d$  en nuestro caso), generado por un mapeo de momento  $\mu$ , entonces las





(a) La esfera de forma.



(b) Configuraciones colineales.

ecuaciones descienden a unas ecuaciones hamiltonianas sobre el espacio cociente, *si nos restringimos al nivel*  $\mu = 0$ . De este modo, en nuestro caso, donde  $\mu = (P, J)$ , las ecuaciones de Newton para el momento angular  $J = 0$  y momento lineal  $P = 0$  se reducen a un sistema de EDO de segundo orden en  $\mathbb{R}^3$ .

Esto aplica para cualquier  $\alpha$ . Luego, para  $\alpha = 2$ , resulta que tenemos una reducción adicional a la Esfera de Forma  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Esto es debido a una simetría de escalamiento. Explicamos esta simetría aquí.

La homogeneidad del potencial  $U$  implica una simetría de las ecuaciones de Newton en espacio-tiempo:

$$(q, t) \mapsto (\lambda q, \lambda^\beta t), \quad \beta = \frac{\alpha + 2}{2}, \quad \lambda > 0.$$

Esto es, si  $q(t)$  una es una solución de (1) entonces también lo es  $q_\lambda(t) = \lambda q(\lambda^{-\beta} t)$ . Bajo esta simetría de escalamiento las velocidades escalan como

$$\dot{q} \mapsto \lambda^{1-\beta} \dot{q}$$

y los *momentos*

$$p = (m_1 \dot{q}_1, m_2 \dot{q}_2, m_2 \dot{q}_3)$$

también escalan como

$$p \mapsto \lambda^{1-\beta} p.$$

Ahora, la única potencia tal que la transformación

$$(q, p) \mapsto (\lambda q, \lambda^{1-\beta} p)$$

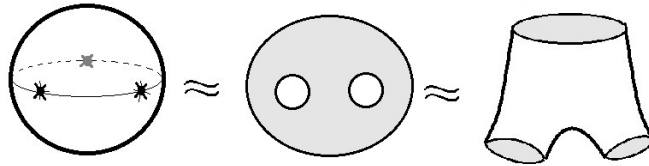
es *simpléctica* (preserva la 2-forma  $\sum dq_i \wedge dp_i$ ) es  $\beta = 2$ , es decir  $\alpha = 2$ . Esto implica que para  $\alpha = 2$  tenemos una cantidad conservada adicional, el momento asociado a la acción de escalamiento,

$$\langle q, \dot{q} \rangle = \sum m_i \langle q_i \dot{q}_i \rangle = \dot{I}.$$

Luego, recordamos que por la identidad de Lagrange-Jacobi tenemos que  $\ddot{I} = 4H$  para  $\alpha = 2$ , así que si tenemos  $H = \dot{I} = 0$  en tiempo  $t = 0$ , tendremos  $H = \dot{I} = 0$  para todo tiempo. Podemos entonces formar el cociente del conjunto  $H = \dot{I} = 0$  por escalamiento.

**Proposición 3.** *Para  $\alpha = 2$ ,  $H = 0$ ,  $\dot{I} = 0$  y  $J = 0$  las ecuaciones de Newton (1) para 3 cuerpos se reducen a un sistema de EDO de segundo orden en la esfera de forma  $S^2 \setminus \{\text{colisiones}\}$ , donde «colisiones» son los 3 puntos que corresponden a las colisiones binarias.*

Las colisiones binarias corresponden a 3 puntos en el ecuador de la esfera de forma. Quitando estos 3 puntos obtenemos, topológicamente hablando, unos «pantalones»...



## 6. Masas iguales

Hemos dado argumentos porqué nos restringimos a  $\alpha = 2$ ,  $H = 0$ ,  $\dot{I} = 0$  y  $J = 0$ . Ahora explicamos porqué nos restringimos a  $m_1 = m_2 = m_3$ . Hay dos razones:

A. Cuando las masas son iguales tenemos simetrías discretas adicionales de intercambio de masas:  $q = (q_1, q_2, q_3) \mapsto (q_{\sigma 1}, q_{\sigma 2}, q_{\sigma 3})$  donde  $\sigma : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  es una permutación de los índices de las partículas.

B. Tenemos una historia de más de 300 años, con unos de los mejores matemáticos, trabajando en el problema de los tres cuerpos, *visto como una perturbación* del problema de los dos cuerpos. No podemos competir. Así que para poder decir algo nuevo, debemos trabajar lo más lejos posible del escenario de la teoría de perturbación, por lo que escogemos  $m_1 \sim m_2 \sim m_3$ , así como  $r_{12} \sim r_{23} \sim r_{31}$ .

## 7. Las 4 ideas de Poincaré

Ahora vamos a describir las ideas de Poincaré y cómo nos ayudan entender nuestro caso especial de las ecuaciones de Newton.

## 7.1. Órbitas periódicas

Al final de la sección 36 del primer volumen de su «Nuevos métodos» [14], se encuentra la siguiente frase famosa de Poincaré:

Dadas unas ecuaciones de la forma definida en la sección núm. 13 y una solución particular cualquiera de esas ecuaciones, podemos siempre encontrar una solución periódica (en la cual el periodo, es cierto, puede ser muy largo), tal que la diferencia entre las dos soluciones sea arbitrariamente pequeña, a lo largo de un intervalo de tiempo arbitrariamente largo. Además, lo que vuelve estas soluciones periódicas tan valiosas, es el hecho que nos proveen, por decirlo de una manera, la única brecha que nos permite intentar a penetrar a una zona hasta la fecha considerada inaccesible...<sup>1</sup>

La «sección número 13» a la cual se refiere Poincaré está en el contexto es de la teoría de perturbaciones. Lo ilustramos con el caso original de Newton de  $\alpha = 1$ . Para 2 cuerpos, cada una de las dos masas traza, con respecto al centro de masa del sistema, una órbita kepleriana —elipse, parábola o hipérbola— que corresponden a  $H < 0$ ,  $H = 0$  o  $H > 0$  (resp.). En particular, el movimiento es periódico si y solo si  $H < 0$ . Esto es un ejemplo de sistema hamiltoniano *integrable* y lo que sugiere Poincaré en la sección núm. 13 es entender el caso de 3 cuerpos como una *perturbación* del caso de 2 cuerpos. Hay varias maneras de hacerlo, dependiendo del parámetro de perturbación que tomamos. Si tomamos por ejemplo el caso de 3 cuerpos con  $m_1 \gg m_2 \gg m_3$  (sol-tierra-cometa) podemos tomar como un parámetro pequeño a  $\epsilon = m_2/m_1$ , o  $m_3/m_2$  así que una aproximación inicial es considerar a los dos pares 12 y 13 como dos sistemas keplerianos no acoplados, lo cual es un sistema integrable, y luego observar cómo cambia el comportamiento del sistema al incrementar el  $\epsilon$ . Kolmogorov, al leer con cuidado la sección núm. 13, le llevó a formular la llamada hoy en día la Teoría KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser), uno de los hallazgos mayores de la dinámica hamiltoniana en el siglo 20.

Vastas extensiones del desarrollo de la teoría de sistemas dinámicos en el siglo 20 se puede entender como un intento de explorar la veracidad

---

<sup>1</sup>«Etant données des équations de la forme définie dans le n° 13 et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut. D'ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable.»

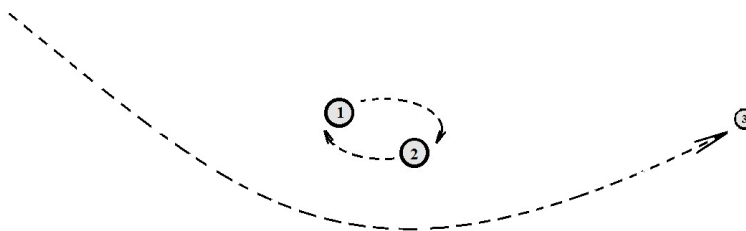
y validez de las afirmaciones de Poincaré en la sección 36 citada arriba, *si nos olvidamos del contexto de la sección 13* (perturbación de sistema integrable) o incluso de la dinámica hamiltoniana. Por ejemplo:

1. El flujo geodésico de una superficie hiperbólica: las órbitas periódicas son densas, y toda trayectoria se puede aproximar a lo largo de un intervalo de tiempo arbitrariamente largo por una órbita periódica.
2. Suponemos que dentro de un sistema hamiltoniano podemos demostrar la existencia de una intersección transversa entre la variedad estable e inestable de algún otro conjunto (equilibrio, órbita periódica, . . . etc.). Entonces dentro del espacio fase tenemos un «enrede»: la unión de estas variedades estables e inestables. Smale utilizó su «herradura» para demostrar que la predicción de Poincaré de la sección 36 sucede para el «enrede». Esta situación se denomina «caos hamiltoniano» y fue descubierta por primera vez por Poincaré en el trabajo famoso que le ganó el premio del Rey Oscar II de Suecia en 1899. (Ver [4] and [2].)
3. Una pequeña industria ha surgido alrededor de la búsqueda de sistemas dinámicos sobre espacios compactos sin *ninguna* órbita periódica. La culminación de estos esfuerzos fue capaz el resultado de Kuperberg [8] estableciendo la existencia de un campo suave con divergencia nula sobre la 3-esfera sin órbitas periódicas.

Ahora bien, si ignoramos el contexto de la sección núm. 13 en el problema de los 3 cuerpos la afirmación de Poincaré es evidentemente falsa para las soluciones de energía positiva con  $\alpha \leq 2$ . Todas estas soluciones son no acotadas (ver proposición 1), por lo que no son periódicas ni pueden ser aproximadas por soluciones periódicas.

Es más, la afirmación de Poincaré sigue siendo falsa aun para soluciones con energía negativa, por la existencia para  $\alpha = 1$  de «escapadores hiperbólicos elípticos», en donde dos de los cuerpos, digamos 1 y 2, forman una «pareja íntima», moviendo en una órbita casi elíptica alrededor de su centro de masa común, mientras el tercer cuerpo, ligero comparado con los primeros dos, se mueve hacia el infinito en una órbita casi hiperbólica. . .

El vector conectando el tercer cuerpo al centro de masas de 1+2 se mueve muy cerca a la órbita de un cometa: una solución de energía positiva al problema de dos cuerpos dada por una hipérbola. La energía de tal solución es negativa ya que está dominada por la energía de los dos cuerpos 1 y 2, que mueven en una órbita casi elíptica. El conjunto



de tales soluciones es *abierto*, por lo que no puede ser «destruido», o perturbado a una solución periódica.

Vamos a ver entonces qué tanto de la predicción de Poincaré podemos salvar, a pesar de la existencia de los escapadores. Para empezar, dividimos el problema en dos partes. Denotamos por  $X$  una parte invariante del espacio fase del problema (por ejemplo, la parte de energía negativa, o el nivel de energía  $-1$ .) Sea  $X_A \subset X$  el subconjunto de condiciones iniciales en  $X$  cuyas soluciones están acotadas (hacia el futuro o el pasado) y sea  $X_P \subset X_A$  el subconjunto de condiciones iniciales de órbitas periódicas.

**Pregunta 1** ¿Será cierto que  $X_A$  es denso en  $X$ ?

**Pregunta 2** ¿Será cierto que  $X_P$  es denso en  $X_A$ ?

Ambos problemas son completamente abiertos para el caso Newtoniano del problema de 3 cuerpos ( $\alpha = 1$ ).

Terminamos esta sección con algunos comentarios acerca de la Pregunta 1. Considera a  $X_{NA} = X \setminus X_A$ , las órbitas no acotadas. Los escapadores muestran que  $X_{NA}$  tiene interior no vacío para  $\alpha < 2$  y  $X$  dado por  $H < 0$ . ¿Qué tan grande es este interior?

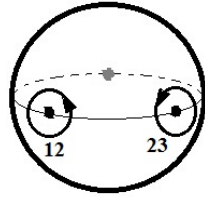
Según Herman [5] el problema más viejo en sistemas dinámicos es la cuestión de la *estabilidad* del sistema solar. En nuestra notación es: ¿Será cierto que  $X_{NA}$  es *denso* en  $X$ ? O reformulándolo de manera más dramática: soplándole con fuerza arbitrariamente pequeña, ¿podemos forzar a Venus a salir de nuestro sistema solar? Recomendamos el artículo [13] para más información.

## 7.2. Topología

Antes de preguntar «¿qué órbitas periódicas son dinámicamente posibles?» es útil hacer primero la pregunta «¿cuáles son las distintas clases de lazos (curvas cerradas)?» Poincaré era uno de los fundadores de la topología algebraica y la herramienta que desarrollo puede servir para contestar la última pregunta.

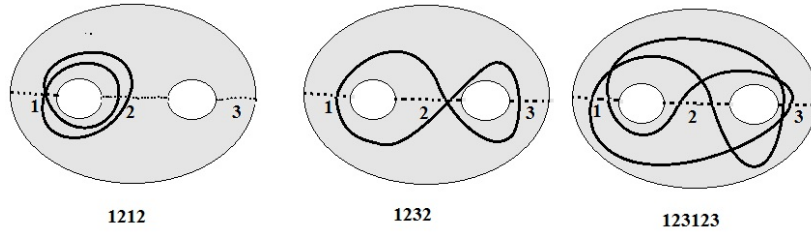
Un *lazo* en una variedad conexa  $X$  es un mapa continuo  $S^1 \rightarrow X$ .

Dos lazos representan la misma clase de homología si forman la frontera de una superficie conexa orientada. El espacio  $H_1(X)$  generado por tales clases de homología forma un grupo abeliano. El grupo de homología  $H_1(P)$  de los «pantalones» es  $\mathbb{Z}^2$ , el grupo abeliano libre en dos generadores. Como generadores podemos tomar las «parejas binarias íntimas» 12 y 23.



Nota que el lazo 13 (adecuadamente orientado) es homólogo a la suma de los lazos 12 y 23.

Decimos que dos lazos en  $X$  son «libremente homotópicos» si forman la frontera de un cilindro (o anillo) inmerso en  $X$ . El conjunto de las clases de equivalencia de homotopía libre de lazos se denota por  $L(X)$ .



Nota: las etiquetas numéricas de los lazos (12, 1232, 123123) se obtienen al marcar los tres segmentos del «ecuador» de la esfera de forma (lo cual corresponde a configuraciones colineales de los tres cuerpos) por el cuerpo que se encuentra en medio de los otros dos, y luego registrar las transiciones del lazo por estas configuraciones colineales. Los detalles de esta correspondencia entre lazos y sucesiones de símbolos se encuentran en nuestro artículo [12].

Como el cilindro es un tipo especial de superficie, podemos ver que la relación de equivalencia «homotopía libre» es más restrictiva que «homología», por lo que obtenemos un mapa  $L(X) \rightarrow H_1(X)$ . Este mapa no es inyectivo. Por ejemplo, una curva cerrada con la clase de homotopía libre [123123] no es libremente homotópica a una curva trivial (curva constante), aunque sí es homóloga a ella.

El espacio fase del problema de los 3 cuerpos, después de la reducción por rotaciones, es el haz tangente a los pantalones  $P$  multiplicado

por una raya, por lo que es homotópico a  $P$ . Así que este espacio fase tiene el mismo grupo de homología y conjunto de clases de homotopía libre como  $P$ .

Como hemos reducido por rotaciones, es natural considerar soluciones periódicas módulo rotaciones. Decimos que una solución  $q(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))$  a las ecuaciones de Newton es *relativamente periódica* con periodo  $T$  si

$$q(t + T) = e^{i\omega} q(t), \quad (7)$$

para algún ángulo de rotación constante  $\omega$ .

**Pregunta 3.** ¿Se puede realizar cualquier clase de homología en  $H_1(P) = \mathbb{Z}^2$  por una solución relativamente periódica de las ecuaciones de Newton?

**Pregunta 4.** ¿Se puede realizar cualquier elemento de  $L(P)$  por una solución relativamente periódica de las ecuaciones de Newton?

Estas preguntas están todavía abiertas en general.

### 7.3. Métodos variacionales

La primera frase de Poincaré en [15] es

La teoría de soluciones periódicas se puede, en ciertos casos, relacionarse con el principio de acción mínima.<sup>2</sup>

En este artículo Poincaré usa métodos variacionales para demostrar que la respuesta a pregunta 3, en ciertos casos, es «sí».

El principio de acción mínima nos dice que las soluciones a las ecuaciones de Newton son los extremales (o puntos críticos) del funcional de la acción

$$A[\gamma] = \int L(\gamma, \dot{\gamma}) dt, \quad L = K + U,$$

sujeto a condiciones apropiados de frontera. En [15] Poincaré utilizó este principio en el caso de  $\alpha = 2$ . Su demostración consiste en dos observaciones:

(1) Para que una deformación continua de un lazo pase de una clase de homología a otra la deformación debe pasar por una colisión.

(2) Para  $\alpha = 2$  cada trayectoria que contiene colisión tiene acción infinita.

La respuesta afirmativa a la Pregunta 3 sigue casi inmediatamente de estas dos observaciones y el método directo del cálculo de variaciones. El método directo consiste en fijar la clase de homología de una

---

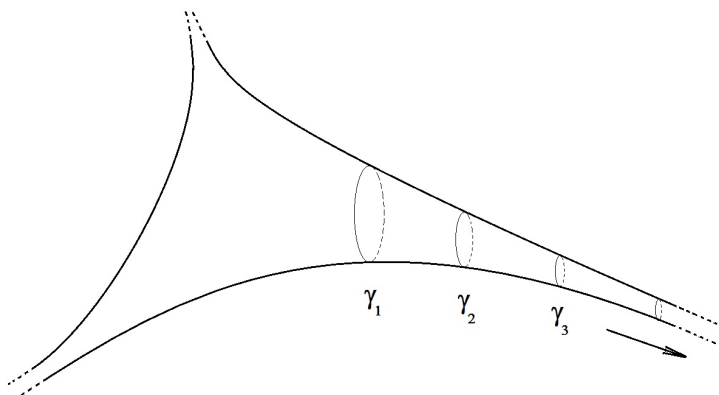
<sup>2</sup>«La théorie des solutions périodiques peut, dans certains case, se rattacher au principe de moindre action.»

trayectoria cerrada y tomar una sucesión minimizante  $\{\gamma_i\}$  de lazos en esta clase. Si la sucesión converge a un lazo en la misma clase de homología, entonces este lazo debe alcanzar el mínimo de la acción sobre toda la clase de homología, por lo que es un extremal de la acción. Por el principio de acción mínima, este lazo minimizante es una solución de las ecuaciones de Newton y así respondiendo en afirmativo la pregunta 3.

Dos obstáculos pueden prevenir la convergencia de la sucesión minimizante:

- (A) colisión (en cuyo caso la sucesión «sale» de la clase de homología),  
o
- (B) la sucesión de lazos «escapa al infinito», evadiendo convergencia.

Poincaré excluyó el obstáculo (A) con su observación (1) y su suposición de  $\alpha = 2$ . El escenario (B) puede suceder debido a la falta de compacidad de los pantalones, como se ilustra en el siguiente figura



Para excluir el escenario (B), fijamos en la ecuación (7) un ángulo total de rotación  $\omega \in (0, 2\pi)$  como parte de las condiciones de frontera en el problema variacional. Si los dos puntos  $q(0), q(T)$  están a una distancia  $R$  del origen, separados por un ángulo  $\omega$ , entonces la distancia entre ellos es  $d = 2R \sin(\omega/2)$ . Si estos dos puntos se encuentran sobre una curva  $\gamma$  y si  $\ell$  es la longitud del segmento de la curva que conecta a los dos puntos, tenemos que

$$A(\gamma) \geq \ell^2/2T \geq d^2/2T = 2R^2 \sin^2(\omega/2)/T.$$

Así que la condición de periodicidad relativa (la ecuación 7) más el hecho que la acción  $A$  es acotada (como es para una sucesión minimizante)



fuerza a la sucesión minimizante  $\gamma_n$  estar a una distancia acotada del origen, así mostrando que el escenario (B) no puede suceder.

En el artículo [11] hemos extendido el trabajo de Poincaré, de clases de homología a clases de homotopía libre y de  $\alpha = 2$  a  $\alpha \geq 2$ , así respondiendo la Pregunta 4 en el afirmativo para  $\alpha \geq 2$ . En aquel tiempo no sabíamos todavía de la existencia del artículo de Poincaré. Realmente hay muy poco nuevo en nuestro artículo comparado con Poincaré. Vea Alain Chenciner [3] para un resumen muy bonito y variaciones sobre las perspectivas ofrecidas aquí.

## 7.4. Geometría hiperbólica

Geometría hiperbólica surgió en el siglo 19 del trabajo de Lobachevsky y Bolyai sobre las fundaciones de la geometría y se ha desarrollado en un área muy amplia. Ver [10]. Un elemento fundamental en el tema es el modelo del disco de Poincaré  $D$ , así como el modelo de semiplano superior. Estos son modelos concretos de geometría hiperbólica que nos permiten visualizar y calcular, íntimamente relacionados con la teoría de funciones de variable compleja.

Una métrica completa hiperbólica en una superficie  $X$  es una métrica de curvatura gaussiana constante  $-1$ . Si  $X$  admite una métrica hiperbólica entonces  $D$  es su cubierta universal.

La fibra de la cubierta  $D \rightarrow X$  es una realización del grupo fundamental  $\Gamma$  de  $X$ , encajado en el grupo de isometría  $ISO(D) \cong PSL(2, \mathbb{R})$  como un subgrupo discreto. Entonces  $X \cong D/\Gamma$ .

El espacio pantalones  $P$  admite una métrica hiperbólica. Una realización de tal métrica nos llega de teoría de números, donde  $\Gamma$  se realiza como el grupo modular  $\Gamma(2) = \{M \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid M \equiv I \pmod{2}\} \subset SL(2, \mathbb{R})$ . El dibujo abajo (a la izquierda) muestra esta estructura (se muestra el tapizado de  $D$  por regiones fundamentales para la acción de  $\Gamma(2)$  en  $D$ ).

Otra estructura hiperbólica en  $P$  se muestra en la figura abajo (a la derecha). La diferencia entre estas dos estructuras es que en la primera el área de  $P$  es finito (es  $\pi$ ) mientras en la segunda es infinito.

Una métrica riemanniana en una variedad define el *flujo geodésico* en el haz tangente unitario  $SX \subset TX$  de esta variedad. Hiperbolicidad de la métrica tiene consecuencias profundas para la dinámica de este flujo. Por ejemplo, si una clase de homotopía es realizable por una órbita periódica, entonces este representante geodésico de la clase es necesariamente único. ¿Será cierto que nuestra dinámica de tres cuerpos sobre  $P$  es de hecho un flujo geodésico hiperbólico disfrazado? Pues... ¡casi!

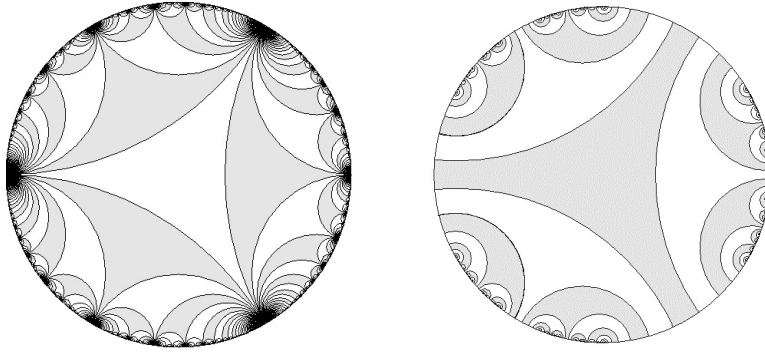


Figura 2: Tapizando el disco de Poincaré con pantalones hiperbólicos de área finita (izquierdo) e infinita (derecha)

Decimos que dos campos vectoriales  $\xi_1, \xi_2$  sobre la misma variedad son «equivalentes por reparametrización» si existe una función suave y positiva  $f$  en la variedad tal que  $\xi_2 = f\xi_1$ . En este caso, las curvas integrales de  $\xi_1$  son reparametrizaciones de las curvas integrales de  $\xi_2$ .

**Proposición 4.** *En el caso de masas iguales,  $J = 0$ ,  $H = 0$  y  $\dot{I} = 0$ , la dinámica de tres cuerpos con potencial  $1/r^2$  en  $P$  es equivalente por reparametrización al flujo geodésico en  $P$  asociado a una métrica riemanniana con curvatura negativa, excepto en los dos puntos de Lagrange (los polos) en donde se anula la curvatura. Esta métrica es completa (toda geodésica se extiende indefinitivamente) y de área infinito.*

Esta proposición, combinada con los métodos establecidos de la geometría hiperbólica más algunos estimados producen un panorama casi completo de la dinámica reducida (en la Esfera de Forma  $P$ ) de tres cuerpos con masas iguales y potencial  $1/r^2$ .

1. Cada órbita periódica es linealmente hiperbólica.

(Una órbita periódica es linealmente hiperbólica si la linealización de su mapa de Poincaré es hiperbólica, es decir sin valores propios sobre el círculo unitario. )

2. Cada clase de homotopía libre en  $P$ , con la excepción de las «parejas íntimas» tipo  $ijijijij \dots ij$ , se realiza por una única solución periódica.
3. Las órbitas periódicas son densas en las órbitas sin colisión.
4. Las órbitas de colisión son densas en el espacio de todas las soluciones.

Referente a los últimos dos incisos, notamos que si en las Preguntas 1 y 2 arriba (sección 7.1) sustituimos el término «acotado» por «sin colisión» entonces la respuesta a ambas preguntas, según los últimos dos incisos, se vuelve «sí». Para más detalles ver el resumen al final de la sección 2 en [12].

Knauf and Klein [6] establecen un panorama bastante similar y completo para el problema del movimiento de un electrón (clásico) en el plano bajo la influencia de  $N$  protones fijos con los mismos métodos hiperbólicos.

## 7.5. Teoría de bifurcación

Nos gustaría establecer análogos de los incisos I-IV arriba para el problema «verdadero» de los tres cuerpos con potencial  $1/r$ . En estos análogos nos gustaría sustituir «colisión» y «sin colisiones» por sus valores originales de «no acotadas» y «acotadas» de las preguntas 1 y 2.

Un método bastante directo para intentar a demostrar estos análogos es considerar a  $\alpha$  como un parámetro continuo de bifurcación variando sobre todo el intervalo  $1 \leq \alpha \leq 2$ . ¿Cuántas órbitas periódicas sobreviven al variar  $\alpha$  de 2 a 1? ¿Cuántas clases de homotopía libre se siguen realizando? ¿Cómo es que la órbita «figura 8» (la que realiza la clase «123123») se convirtió de hiperbólica en  $\alpha = 2$  a elíptica (el mapa de retorno linealizado tiene todos sus valores propios en el círculo unitario) en  $\alpha = 1$ ?

Cada solución periódica  $\gamma$  para  $\alpha = 2$  es linealmente hiperbólica (inciso 1 al final de la última sección). Así que podemos perturbar esta solución para obtener una solución periódica, linealmente hiperbólica, para  $\alpha$  en algún intervalo  $[2 - \epsilon(\gamma), 2]$ . Con suerte, estos intervalos llegan hasta  $\alpha = 1$ . Pero para la órbita figura 8 este intervalo claramente no llega hasta  $\alpha = 1$  porque en  $\alpha = 1$  esta órbita es elíptica. . . ¿Qué sucede en general?

Citamos del párrafo 37 del vol. 1 de Poincaré [14]:

Una solución periódica no puede entonces desaparecer a menos que se desaparezca junto con otra solución periódica. En otras palabras, las soluciones periódicas desaparecen en pares, en la misma manera que las raíces reales de ecuaciones algebraicas. <sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> “Une solution périodique ne peut donc disparaître qu’après s’être confondue avec une autre solution périodique. En d’autres termes, les solutions périodiques disparaissent par couples à la façon des racines réelles des équations algébriques.”

No sabemos como obtener los resultados indicados aquí sin análisis numérico extenso. Existen algunos algoritmos y paquetes para perseguir órbitas. Uno es el programa AUTO desarrollado por S. Doedel y extendido por H. Keller y otros [7].

## Bibliografía

1. V. I. Arnol'd, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1989.
2. J. Barrow-Greene, *Poincaré and the Three-Body Problem*, History of Math., tomo 11, A. M. S., 1997.
3. A. Chenciner, «Action minimizing solutions of the Newtonian n-body problem: from homology to symmetry», ICM 2002, v. 3.
4. F. Diacu y P. Holmes, *Celestial Encounters: The Origins of Chaos and Stability*, Princeton Science Library, Princeton U. Press, 1997.
5. M. Herman, «Some open problems in dynamical systems», Proceedings I.C.M., Berlin, 1998, 797–808.
6. M. Klein y A. Knauf, «Classical Planar Scattering by Coulombic Potentials», Lect. Notes Phys., monograph 13, Springer-Verlag, 1992.
7. B. Krauskopf, H. M. Osinga y J. Galan-Vioque, eds., *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems*, Springer-Verlag, 2007.
8. K. Kuperberg, «A smooth counterexample to the Seifert conjecture», *Ann. of Math.*, vol. (2) 140, núm. 3, 1994, 723–732.
9. L. Landau y E. Lifshitz, *Mechanics, a Course of Theoretical Physics*, tomo 1, Pergamon Press, 1976.
10. J. W. Milnor, «Hyperbolic geometry: The first 150 years», *Bull. AMS (N.S.)*, vol. 6, núm. 1, 1982, 9–24.
11. R. Montgomery, «The N-body problem, the braid group, and action-minimizing periodic solutions», *Nonlinearity*, vol. 11, 1998, 363–371.
12. ———, «Fitting hyperbolic pants to a three-body problem», *Erg. Th. Dynam. Sys.*, vol. 25, núm. 3, 2005, 921–947.
13. J. Moser, «Is the Solar System Stable?», *The Mathematical Intelligencer*, vol. 1, 1978, 65–71.
14. H. Poincaré, «Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste», *Gauthier-Villars, Paris*, vol. 1-3 1892–1899.
15. ———, «Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action», *C.R.A.S. Paris*, vol. 123, 1896, 915–918.