Miscelánea Matemática **33** (2001) 57–67 SMM

Un resultado de Leonhard Euler relativo a series infinitas

Gonzalo Aguilar Quiroz
Departamento de Física y Matemáticas
Universidad de las Américas Puebla
MÉXICO
gaguilar@mail.udlap.mx

Resumen

En este trabajo, se presentan dos formas distintas de argumentar un mismo resultado relativo a series infinitas. Por un lado, se expone de manera intuitiva, aunque no trivial, las principales ideas que Leonhard Euler (1707-1783) utilizó, para deducir en 1736, la sorprendente relación

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Por otro lado, se presentan algunas definiciones y propiedades de las series trigonométricas de Joseph Fourier (1768-1830), que publicara en su Teoría Analítica del Calor por el año de 1820, las que se utilizan para argumentar el mismo resultado que Euler descubrió casi un siglo antes.

1. Introducción.

El objetivo de este trabajo es analizar un resultado relativo a series infinitas, demostrado por Euler utilizando ingeniosas relaciones, el cual afirma que la suma de los recíprocos de los cuadrados de todos los enteros positivos es $\pi^2/6$. El lector moderno puede haber encontrado una demostración de dicha afirmación en textos de análisis o de ecuaciones diferenciales, como ejemplo de aplicación de las series de Fourier, pero el argumento de Euler es poco conocido.

Presentar las principales ideas de los dos argumentos que justifican la afirmación propuesta, con un mínimo de formalismo y de rigor en favor de una mayor comprensión para un lector no especializado, puede resultar de interés, no sólo para alumnos de las carreras de matemáticas, física o ingeniería, sino para todo lector con algunos conocimientos básicos de matemáticas.

2. Siguiendo las ideas de Euler.

Producto de la incomparable intuición de Euler para ver relaciones entre fórmulas sin aparente conexión, es el descubrimiento que hizo, en 1736, del siguiente resultado:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + = \frac{\pi^2}{6}. \tag{1}$$

Con palabras: la suma infinita de los recíprocos cuadrados de todos los enteros positivos, es pi cuadrado sobre seis.

He aquí las principales ideas de la argumentación de Euler:

A decir de sus biógrafos, sin usar el teorema de Taylor u otras herramientas de cálculo, que ya existían, Euler desarrolla en serie de potencias enteras a

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots. \tag{2}$$

o su equivalente,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} - \ldots. \tag{3}$$

para x no cero.

Si $z = x^2$, el lado derecho de la serie (3) se transforma en

$$1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \frac{z^4}{9!} - \ldots. \tag{4}$$

Cuando $\operatorname{sen} x = 0$, la serie (3) y por tanto, la serie (4), puede concebirse como una *ecuación polinómica infinita.*

Sea

$$\begin{aligned} P_n(z) &= 1 - a_1 z + a_2 z^2 - a_3 z^3 + \cdots + (-1)^n a_n z^n \\ &= (-1)^n a_n \left[z^n - \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{a_1}{a_n} z + (-1)^n \frac{1}{a_n} \right] \end{aligned} \tag{5}$$

el polinomio de grado n asociado a la serie (4).

3. Un poco sobre Teoría de Ecuaciones.

Sea

$$\begin{aligned} P_n(x) &= b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0 \\ &= b_n\left(x^n + \frac{b_{n-1}}{b_n}x^{n-1} + \frac{b_{n-2}}{b_n}x^{n-2} + \cdots + \frac{b_1}{b_n}x + \frac{b_0}{b_n}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

un polinomio de grado n en x, con b_n no cero.

Por el teorema de factorización completa para polinomios, que asegura que si $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$, son raices de $P_n(x)$, (iguales o no), se tiene

$$\begin{aligned} P_n(x) &= b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0 \\ &= b_n(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\ldots(x-r_n) \qquad \text{que por (6)} \\ &= b_n\left(x^n + \frac{b_{n-1}}{b_n}x^{n-1} + \frac{b_{n-2}}{b_n}x^{n-2} + \cdots + \frac{b_1}{b_n}x + \frac{b_0}{b_n}\right) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} & x^n + \frac{b_{n-1}}{b_n}x^{n-1} + \frac{b_{n-2}}{b_n}x^{n-2} + \cdots + \frac{b_1}{b_n}x + \frac{b_0}{b_n} = \\ & \qquad = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\ldots(x-r_n)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Desarrollando el lado derecho de la ecución anterior para

$n = 1$,

$x - r_1 = x - r_1$

$n = 2$,

$(x-r_1)(x-r_2) = x^2 - (r_1+r_2)x + r_1r_2$

$n = 3$,

$(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3) = x^3 - (r_1+r_2+r_3)x^2 + (r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)x - r_1r_2r_3$

$n = 4$,

$$\begin{aligned} (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4) &= x^4 - (r_1+r_2+r_3+r_4)x^3 + \\ & (r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4)x^2 \\ & -(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4)x + r_1r_2r_3r_4\,. \end{aligned}$$

puede inferirse (se demuestra por inducción, aunque aquí no se hará) que

$$\begin{aligned} & (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\ldots(x-r_n) = \\ & \quad = x^n - \sum_{i=1}^{n} r_ix^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{n} r_i}{r_j}x + (-1)^n\prod_{i=1}^{n} r_i \end{aligned}$$

Por lo anterior, la ecuación (7) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} x^n + \frac{b_{n-1}}{b_n}x^{n-1} + \frac{b_{n-2}}{b_n}x^{n-2} + \cdots + \frac{b_1}{b_n}x + \frac{b_0}{b_n} = \\ = x^n - \sum_{n=1}^{n} r_i x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{n} r_i}{r_j}x(-1)^n\prod_{i=1}^{n} r_i \end{aligned}$$

y de aquí

$$\frac{b_1}{b_n} = (-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{n} r_i}{r_j} \qquad \text{y} \qquad \frac{b_0}{b_n} = (-1)^n\prod_{i=1}^{n} r_i\,.$$

Sustituyendo la segunda expresión en la primera

$$\frac{b_1}{b_n} = (-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{-n}\frac{b_0}{b_n}}{r_j}, \qquad \text{de donde} \qquad b_1 = -\sum_{j=1}^{n}\frac{b_0}{r_j}. \quad (8)$$

Retomando la serie (4), $1-\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\frac{z^3}{7!}+\frac{z^4}{9!}-\ldots$ y su correspondiente polinomio asociado,

$$\begin{aligned} P_n(z) &= 1 - a_1 z + a_2 z^2 - a_3 z^3 + \cdots + (-1)^n a_n z^n \\ &= (-1)^n a_n\left[z^n - \frac{a_{n-1}}{a_n}z^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n}z + (-1)^n\frac{1}{a_n}\right]. \end{aligned}$$

Si $k_1, k_2, k_3, \ldots k_n$ son las raíces de este polinomio, por el teorema de la factorización completa, que se utilizó para $P_n(x)$, se tiene

$$\begin{aligned} P_n(z) &= 1 - a_1 z + a_2 z^2 - a_3 z^3 + \cdots + (-1)^n a_n z^n \\ &= (-1)^n a_n\left[z^n - \frac{a_{n-1}}{a_n}z^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n}z + (-1)^n\frac{1}{a_n}\right] \\ &= (-1)^n a_n\left[(z-k_1)(z-k_2)(z-k_3)\ldots(z-k_n)\right]. \end{aligned}$$

Con un proceso análogo al que se aplicó al polinomio $P_n(x)$ para encontrar la relación entre los coeficientes y sus raíces, se logra que

$$(-1)^{n-1}\frac{a_1}{a_n} = (-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{n} k_i}{k_j} \qquad \text{y} \qquad (-1)^n\frac{1}{a_n} = (-1)^n\prod_{i=1}^{n} k_i\,.$$

Estas dos ecuaciones se trasforman en

$$a_1 = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{a_n} = \prod_{i=1}^{n} k_i\,. \quad (9)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
P_n(z) &= 1 - a_1 z + a_2 z^2 - a_3 z^3 + \cdots + (-1)^n a_n z^n \\
&= (-1)^n a_n \left[(z-k_1)(z-k_2)(z-k_3)\ldots(z-k_n)\right] \\
&= (-1)^n a_n \left[(-k_1)\left(1-\frac{z}{k_1}\right)(-k_2)\left(1-\frac{z}{k_2}\right)(-k_3)\left(1-\frac{z}{k_3}\right)\ldots(-k_n)\left(1-\frac{z}{k_n}\right)\right] \\
&= (-1)^n a_n (-1)^n \left(\prod_{i=1}^{n} k_i\right)\left(1-\frac{z}{k_1}\right)\left(1-\frac{z}{k_2}\right)\left(1-\frac{z}{k_3}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{k_n}\right) \qquad \text{por (9)} \\
&= (-1)^{2n} a_n \frac{1}{a_n}\left(1-\frac{z}{k_1}\right)\left(1-\frac{z}{k_2}\right)\left(1-\frac{z}{k_3}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{k_n}\right) \\
&= \left(1-\frac{z}{k_1}\right)\left(1-\frac{z}{k_2}\right)\left(1-\frac{z}{k_3}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{k_n}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
1 - a_1 z + a_2 z^2 - a_3 z^3 + \cdots + (-1)^n a_n z^n &= \\
= \left(1-\frac{z}{k_1}\right)\left(1-\frac{z}{k_2}\right)\left(1-\frac{z}{k_3}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{k_n}\right)&. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Como las raíces de la "ecuación infinita"

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$$

son $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots, \pm n\pi$; las raíces de la ecuación

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!}\ldots$$

serán $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, 16\pi^2, \ldots, n^2\pi^2$.

Combinando (3), (4) y (10), con $k_j = (j\pi)^2$, se tiene

$$\begin{aligned}
1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!}\cdots &= \\
= 1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \frac{z^4}{9!} - \ldots& \\
= \left(1-\frac{z}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{z}{16\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{n\pi^2}\right)&,
\end{aligned}$$

es decir

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\ldots.$$

Si hacemos que $n \to \infty$ en $a_1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j}$ (una de las ecuaciones de (9)) y tomando en cuenta que $k_j = (j\pi)^2$ y $a_1 = \frac{1}{3!}$ (coeficiente de z en (4)), se tiene

$$\frac{1}{6} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j\pi)^2} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \dots .$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots\right] = \frac{1}{6}$$

y finalmente, la ecuación buscada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} .$$

Hasta este punto, se ha utilizado sólo álgebra elemental y la noción intuitiva de límite para concluir el resultado propuesto, sin embargo, se ha omitido deliberadamente hablar sobre la idea de convergencia que Euler manejó, vía el uso de su aritmética de infinitos e infinitesimales. En su lugar, se sugiere al lector interesado leer el excelente artículo [6].

4. Serie trigonométrica de Fourier.

Definición. Una *serie trigonométrica de periodo* 2π, es una suma infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

donde a_n y b_n son números reales. Es de notarse que la anterior suma infinita puede escribirse como

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) .$$

Una serie de Fourier es una serie trigonométrica de tipo especial, cuyos coeficientes a_n y b_n se definen en términos de una función real fija $f(x)$, con ciertas características.

Definición. Una función f, definida para toda x, se llama *periódica* si existe un número positivo T, tal que $f(x+T) = f(x)$.

Definición. La función f, se dice que tiene una *discontinuidad de salto* en x_0, si sus límites cuando $x \to x_0^-$ y cuando $x \to x_0^+$ (límites por la izquierda y por la derecha) son finitos y distintos. A estos límites se denotan respectivamente por $f(x_0^-)$ y $f(x_0^+)$.

Definición. Una función f, se llama *continua por tramos*, si cada intervalo $[a, b]$ de su dominio, contiene un número finito de discontinuidades de salto.

En su célebre tratado *The Analytical Theory of Heat* (1822), el científico francés Joseph Fourier (1768-1830), hizo una notable aseveración:

Toda función real $f(x)$, continua por tramos y con periodo 2π, puede representarse como una serie trigonométrica de la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{11}$$

donde los números a_0, a_n y b_n vienen dados por las fórmulas de Euler:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx\,, \tag{12}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx\,, \tag{13}$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx\,. \tag{14}$$

A la serie (11) se llama *serie trigonométrica de Fourier* y a los números a_0, a_n y b_n calculados por (12), (13) y (14) respectivamente, se llaman *coeficientes de Fourier*. La correspondiente serie de Fourier, para una función f, continua por tramos y con periodo positivo arbitrario $P = 2L$, viene dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{15}$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx\,, \tag{16}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx\,, \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

y

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx\,. \tag{19}$$

Se demuestra, aunque aquí no se hará, que si f se define en un intervalo de longitud $2L$ diferente a $-L < x < L$, tal como $c < x < c + 2L$ con c cualquier número real, entonces la serie de Fourier de f, está dada por (15), pero (16), (17) y (19) cambian a:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\,dx\,, \tag{20}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\,, \tag{21}$$

y

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{22}$$

que pueden resultar más fáciles de calcular.

5. El teorema de convergencia y algunos ejemplos.

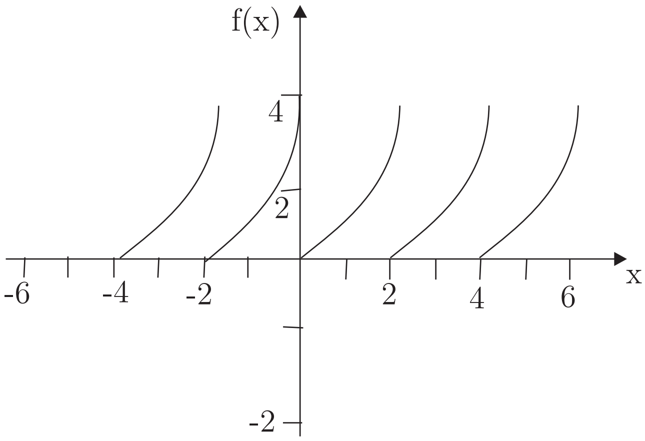
Muchos son los resultados teóricos relativos a las series de Fourier, pero el teorema de convergencia, puede considerarse uno de los más importantes.

Este asegura que si f es una función de periodo $2L$, con $f(x)$ y $f'(x)$ continuas por tramos, entonces su serie de Fourier converge:

(a) al valor $f(x)$ en todo punto en el que f es continua y

(b) al valor $\frac{1}{2}\left[f(x_0^-) + f(x_0^+)\right]$ en cada punto en que f es discontinua.

Ejemplo. Determinar la serie de Fourier de la función $f(x) = x^2$, para $0 < x < 2$ y con periodo 2.



Solución. Utilizando las fórmulas (20), (21) y (22) respectivamente, con $L = 1$ y $c = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{1}\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3} \\
a_n &= \int_0^2 x^2 \cos n\pi x\,dx \left(u = n\pi x, x = \frac{u}{n\pi}, dx = \frac{du}{n\pi}\right) \\
&= \frac{1}{n^3\pi^3}\int_0^{2n\pi} u^2 \cos u\,du \text{ (integrando por partes)} \\
&= \frac{1}{n^3\pi^3}\left[u^2 \operatorname{sen} u - 2\operatorname{sen} u + 2u\cos u\right]_0^{2n\pi} \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\,,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_0^2 x^2 \operatorname{sen} n\pi x\,dx \\
&= \frac{1}{n^3\pi^3}\int_0^{2n\pi} u^2 \operatorname{sen} u\,du \\
&= \frac{1}{n^3\pi^3}\left[-U^2\cos u + 2\cos u + 2u\operatorname{sen} u\right] \\
&= -\frac{4}{n\pi}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de

$$f(x) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{n^2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\pi x}{n}\,. \tag{23}$$

El teorema de convergencia asegura que la serie converge a $f(x)$ para toda x en donde $f(x)$ es continua y a $\frac{1}{2}\left[f(x_0^-)+f(x_0^+)\right]$ en los puntos de discontinuidad: $x = 2m$ para $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Sustituyendo el punto de discontinuidad $x = 0$, en cada lado de (23), se tiene

$$f(0) = \frac{1}{2}\,[4+0] = 2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,,$$

de donde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}\left[2-\frac{4}{3}\right]\,,$$

y de aquí, nuevamente la sorprendente ecuación

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}\,. \tag{24}$$

Otros resultados igualmente interesantes que se obtienen de este ejemplo, son: Al sustituir $x = 1$ en cada lado de (23), resulta

$$f(1) = 1 = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

y de aquí

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}\left[\frac{4}{3}-1\right]\,,$$

que desarrollando la serie, queda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)n+1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}\,. \tag{25}$$

Finalmente, sumando (24) con (25)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots \\
&= 2\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\right] \\
&= \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}\,. \tag{26}$$

Cabe señalar que las ecuaciones (25) y (26) fueron encontradas también por Leonhard Euler.

Referencias

[1] A. Adrián Albert, Algebra Superior. Grupo Noriega Editores. México, 1991.

[2] Edwards/Penney, Ecuaciones Diferenciales Elementales. Prentice Hall. México, 1986.

[3] E. T. Bell, Historia de las Matemáticas. 2da. ed. Fondo de Cultura Económica. México, 1985.

[4] Iván Castro Chadid, Leonhard Euler. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1996.

[5] J. V. Uspensky, Teoría de Ecuaciones. Limusa. México, 1988.

[6] Ricardo Quintero, *Una reelectura del introductio in analysin infinitorum de Euler*, Miscelánea Matemática, Soc. Mat. Mexicana **28**, Julio 1999.

[7] J. Rey Pastor y José Babini, Historia de la Matemática. Gedisa. Barcelona, España, 1985.

[8] George S. Simmons, Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones y Notas Históricas. 2da. ed. McGraw-Hill. México, 1993.